Continuité, théorème de valeurs intermédiaires.

I. Définition.

Déf :

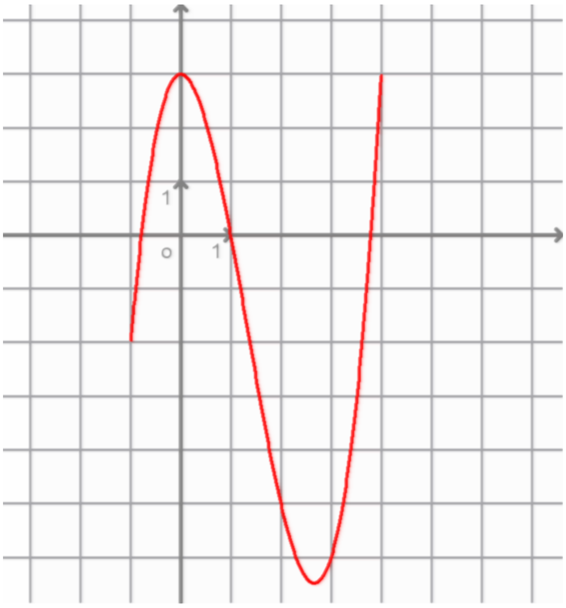
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R. Soit a€I.

- f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout réel a€I.

Rem :

Cela revient à dire qu'une fonction est continue sur I c IR si on peut tracer sa repésentation graphique sur I «sans lever le crayon».

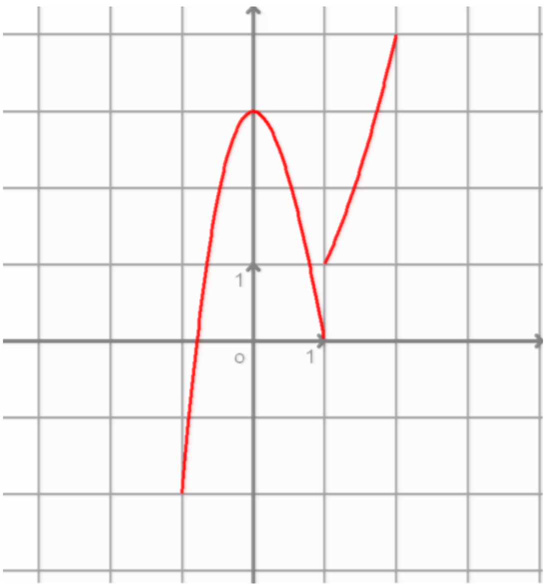
ex 1 :



Sur [-1;4], on peut tracer la courbe sans lever le crayon : il n’y a aucun «saut».

f est continue sur [-1;4].

Ex 2 :



Sur [-1;2], on ne peut pas tracer la courbe sans lever le crayon : f n’est pas continue sur cet intervalle.

La courbe présente un «saut» à l’abscisse 1: f n’est pas continue en 1.

II. Continuité et dérivation.

Prop :

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I.

Dém :

f est une fonction dérivable en tout réel x de I. Soit a€I et soit $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

On a $f(x)=g(x)(x-a)+f(a)$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)(x-a)+f(a)=f'(a)\times 0+f(a)=f(a)$$

Donc f est continue sur I. CQFD.

Rem :

La réciproque est fausse:

La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est continue sur [0;+oo[mais n'est pas dérivable en 0.

Conséquences:

- Les fonctions polynômes, cosinus et sinus sont continues sur R.
- Les fonctions rationnelles et la fonction tangente sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- La somme et le produit de fonctions continues sont des fonctions continues.

Prop :

- La somme et le produit de fonctions continues sont des fonctions continues.

Ex :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\sqrt{x}+x$$

- x^2+1 ne s'annule jamais donc $\dfrac{1}{x^2+1}$ est continue sur R et donc sur R^+.
- $\sqrt{x}$ est continue sur R^+.
- x est continue sur R donc sur R+

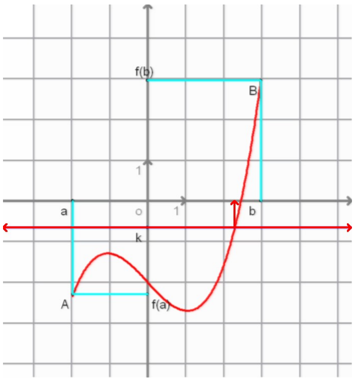
f est la somme de trois fonctions continues sur R^+, f est donc continue sur R^+.

III. Théorème de valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intérmédiares.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle IcIR. Soit a€I et b€I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c)=k.

Interprétation graphique:

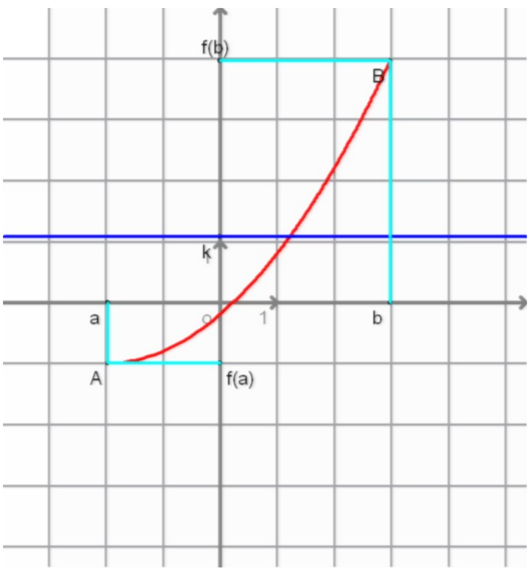


Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un antécédent c de k par f entre a et b …

Corollaire:

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soit a€I et b€I.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe un et un seul réel c compris entre a et b tel que f(c)=k.
Le réel c est l'unique solution comprise entre a et b de l'équation f(x)=k .

Interprétation graphique:



Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe un unique antécédent c de k par f entre a et b …

Généralisation: Il s'agit de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires sur un ouvert.

a,b, α et β désignent des réels,+oo ou –oo.

Si f est une fonction strictement continue sur]a;b[telle que $\begin{cases} \lim\limits_{a} f = \alpha \\ \lim\limits_{b} f = \beta \end{cases}$.

Alors, pour tout réel k compris entre α et β, il existe une unique solution à l'équation f(x)=k dans l'intervalle]a;b[.

Ex :

Ici $\begin{cases} \lim\limits_{-2} f = +\infty \\ \lim\limits_{2} f = -\infty \end{cases}$ et f est strictement décroissant sur]-2 ;2[.

Alors, pour tout k∈R, l'équation f(x)=k admet un et une seule solution dans]-2 ;2[