Calcul vectoriel

I. Produit scalaire dans le plan.

1. Les différentes écritures du produit scalaire.

Déf/prop :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ le réel défini par :

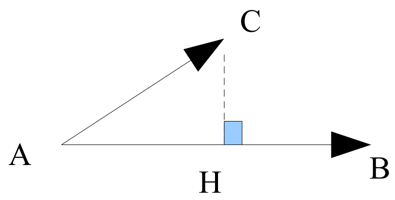
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

- Si $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et que le projeté orthonale de C sur (AB) est H alors :

  * Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, $\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$.



  * Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ n' ont pas même sens, $\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH.$

Rem :

On notera $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$

2. Règles de calcul.

Prop :

Pour tout $\vec{u}, \vec{v}\, et\, \vec{w}$,et $tout\, k \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}.\vec{v}.$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\,\vec{u}.\vec{v}.$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

3. Orthogonalité et applications.

Prop :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

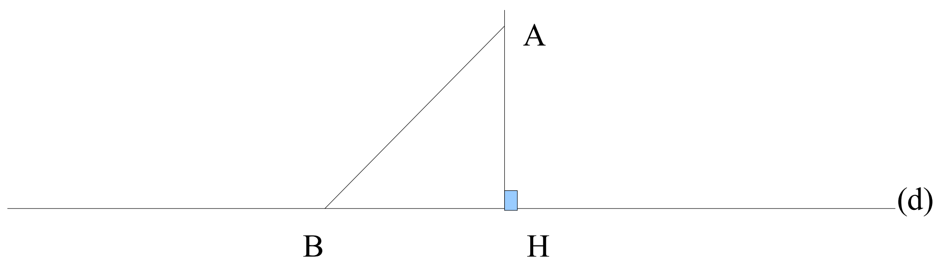
Conséquence no 1 :

Soit (d) un droite d'équation ax+by+c=0 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(d) admettant comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, elle admet comme vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Conséquence No 2 :

Soit (d) un droite d'équation ax+by+c=0 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan. Alors la distance de A à (d) est $AH=\frac{|a x_A+b y_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (d).



Dém :

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (d) et $B(x_B;y_B)$ un point de (d).

$\overrightarrow{BA}.\vec{n}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}).\vec{n}=\overrightarrow{BH}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}=\overrightarrow{HA}.\vec{n}$ car $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Comme $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont de même direction, $|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|=|\overrightarrow{HA}.\vec{n}|=HA\times\|\vec{n}\|$

D'où $AH=\dfrac{|\overrightarrow{BA}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$. Comme $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BA}.\vec{n}=a(x_A-x_B)+b(y_A-y_B)=a\,x_A+b\,y_A-(a\,x_B+b\,y_B)$$

Or $B\in(d)$ donc $a\,x_B+b\,y_B+c=0$ *ou* $a\,x_B+b\,y_B=-c$.

On en déduit $\overrightarrow{BA}.\vec{n}=a\,x_A+b\,y_A+c$ puis, comme $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}$, $AH=\dfrac{|a\,x_A+b\,y_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Conséquence no 3

On se sert de produit scalaire pour retrouver l'équation d'une cercle à partir de son diamètre.

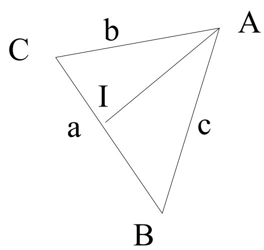
Soit (C) un cercle de diamètre [AB].

$$M(x\,;y)\in(C)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=\vec{0}\Leftrightarrow(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$

Une fois trouvée l'équation de (C), on peut toujours la remettre sous la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$ où $\Omega(x_\Omega\,;y_\Omega)$ est le centre du cercle est R son rayon.

3. Relations métriques dans le triangle.

Soit ABC un triangle. Posons a=BC, b=AC et c=AB. Soit I le milieu de [BC].



- Théorème d'Al-Kashi : $a^2=b^2+c^2-2\mathrm{bc}\cos\widehat{A}$

  $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{abc}{2\mathrm{S}}$ où S est l'aire de ABC.

- Théorème de la médiane: $AB^2+AC^2=2\mathrm{AI}^2+\dfrac{1}{2}BC^2$.

II. Produit scalaire dans l'espace.

1. On se ramène au plan.

Prop :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit A,B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et donc celui de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC). On a donc, comme dans le plan :

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Règles de calcul :

Puisqu'on peut se rapporter au plan, Pour tout $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$,et *tout* $k\in\mathbb{R}$:

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\ \vec{u}.\vec{v}.$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\ \vec{u}.\vec{v}.$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

2. Dans un repère orthonormé.

Prop :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors :

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Dém:

On utilise $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2$, $\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2+z'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2$.

Il suffit maintenant de remplacer, développer et simplifier.

Conséquence :

Pour tout $\vec{u},\vec{v}\,et\,\vec{w}$,et *tout* $k\in\mathbb{R}$, $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

Dém :

Il suffit de calculer chaque membre grâce aux coordonnées des vecteurs. On ne pouvait pas avoir cette propriété au 1) car trois vecteurs ne sont pas toujours coplanaires.

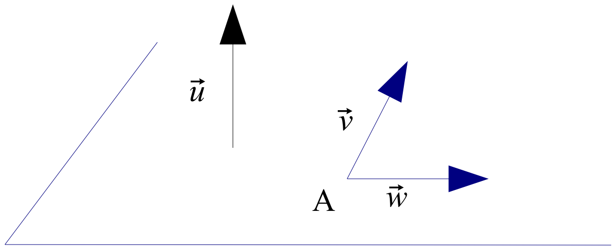
3. Orthogonalité dans l'espace.

Prop :

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs et nul.

Conséquence no 1 :

Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et perpendiculaire à un plan (P) de repère $(A;\vec{v},\vec{w})$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}=0$.



Dém :

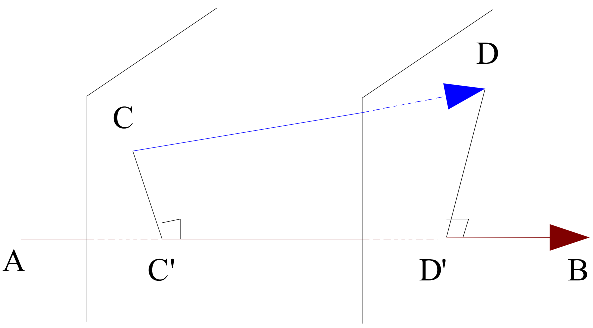
Tout vecteur $\vec{u'}$ du plan (P) peut s'écrire sous la forme $a\vec{u}+b\vec{v}$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. Donc $\vec{u}.\vec{u'}=a\vec{u}.\vec{v}+b\vec{u}.\vec{w}=0$

Tout droite du plan (P) est donc orthogonale à (D) et par conséquent, (D) est orthogonale au plan (P).

Conséquence 2 :

Soit vec u et vec v deux vecteurs de l'espace et A,B,C et D quatre points tels que v $ec\,u=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.

Soit C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur (AB). On a $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



Dém :

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'D})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

Conséquence 3 :

- On appelle vecteur normal d'un plan (P) tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à (P).

- Soit $\vec{n}$ vecteur et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan de vectreur normal $\vec{n}$ qui passe par A.

- Dans un repère orthonormé de l'espace, tout plan a une équation cartésienne de la forme ax+by+cz+d=0 (où a,b,c,d sont des réels non tous nuls) et toute équation de cette forme est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Dém :

- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point d'un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (on a donc a,b et c non tous nuls).

$$M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\ \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\ \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$
$$avec\ d=-ax_a-by_A-cz_A$$

- Soit (E) d'équation ax+by+cz+d=0.

  Si $a\neq0,\ A(\frac{-d}{a};0;0)\in(E)$. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et M(x;y;z).

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x+\frac{d}{a})+by+cz=ax+by+cz+d\ .$$

Donc $M\in(E)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\ \Leftrightarrow(E)$ le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A.

Si a=0, on fait la même chose avec b...

Ex :

Soit (P) le plan passant par A(1;2;4) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$.

$$M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\ \Leftrightarrow-1(x-1)+3(y-2)+2(z-4)=0\ \Leftrightarrow-x+3\mathrm{y}+2\mathrm{z}-13=0$$