Dérivation

I. Dérivation et variations.

1. Limite en a€R.

Déf :

On dit qu'une fonction f tend vers un réel l lorsque x tend vers un réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les réels f(x) dès que x est assez proche de a. On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim_{a} f = l$. On peut également dire qu'il est possible de rendre f(x) aussi proche que l'on veut de l en rendant x suffisement proche de a.

Ex :

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Pour tout x≠1, f(x)=x+1. Donc tout intervalle contenant 2 contient également tous les x+1 dès que x est assez proche de 1.

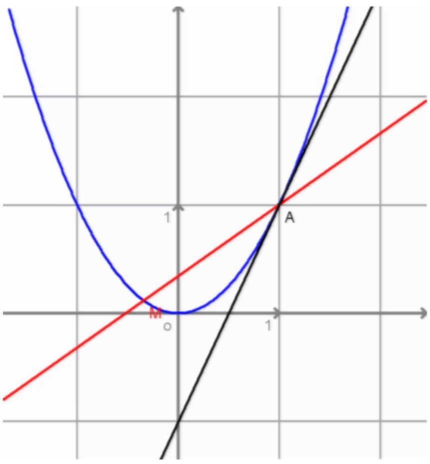
Ainsi, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

2. Nombre dérivé et fonction dérivée.

Déf :

Soit f une fonction définie sur un intervalle IcR. Soit a€I. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée nombre dérivée de f en a et notée f'(a).

Interprétation graphique :



S'il existe, le nombre dérivé de f en a (ici a=1) est la limite du taux d'accroissement de f entre les abscisses a et b. Lorsque le point M tend vers A, la droite rouge tend vers la tangente bleue : f'(a) correspond donc au coefficient directeur de la tangente à la courbe de f à l'abscisse a.

Cette tangente a pour équation :
y=f'(a)(x-a)+f(a).

Fonction dérivée :

Si une fonction f admet un nombre dérivé en tout réel x d'un intervalle I$\subset$R, on dit qu'elle est dérivable sur I. La fonction dérivée de f sur I est notée f' est associe à tout nombre x$\in$I le nombre dérivé f'(x).

3. Opérations sur les dérivées.

Th :

Soit u et v deux fonctions dérivable sur un intervalle I$\subset$R. Soit k$\in$R. Alors :

- u+v, ku et uv sont dérivables sur I et :

(u+v)'=u'+v'
(ku)'=ku'
(uv)'=u'v+v'u

- si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et : $\frac{1}{v} = \frac{-v'}{v^2}$ $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Dém :

On utilise la définition du nombre dérivé.

Ex :

4. Dérivées usuelles.

Fonction f	Définie sur	Dérivable sur	dérivée
a où a$\in$R	R	R	0
ax+b où a$\in$R,b¿R	R	R	a
x^n où n$\in$N*	R	R	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$ où n$\in$N*	R*	R*	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	R^+	R^{+*}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Cos(x)	R	R	-sin(x)
Sin(x)	R	R	Cos(x)
Tan(x)	R-$\left\{\frac{\pm\pi}{2}+k\pi\right\}$ où k$\in$R	R-$\left\{\frac{\pm\pi}{2}+k\pi\right\}$ où k$\in$R	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Dém :

- ax+b, $\sqrt{x}$ avec la définition du nombre dérivé.
- x^n, et $\frac{1}{x^n}$ par récurrence.

5. Fonction composée et dérivée.

Déf :

Soit u une fonction définie sur un intervalle IcR prenant ses valeurs dans J. Soit v une fonction définie sur J. on appelle fonction composée de u suivie de v la fonction vou(x)=v(u(x)).

$$x \xrightarrow{vou} vou(x)$$

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x))$$

Ex :

Soit f(x)= $\sqrt{6x-2}$ définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$

f est la composée de u suivie de v avec $\begin{cases} u(x) = 6x-2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

$$x \xrightarrow{u} u(x) = 6x-2 \xrightarrow{v} v(u(x)) = v(6x-2) = \sqrt{6x-2}$$

Prop :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle IcR prenant ses valeurs dans J. Soit v une fonction dérivable sur J. Alors vou est dérivable sur I et $(vou)' = u' \times v'ou$.

C'est-à-dire que, pour tout xЄI, $(vou(x))' = u'(x) \times v'(u(x))$.

Dém :

$$\lim_{x \to a} \frac{vou(x) - vou(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \left(\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x-a} \right)$$

Or v est dérivable sur J et u sur I. On obtient donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{vou(x) - vou(a)}{x-a} = v'(u(a)) \times u'(a) .$$

CQFD.

Ex :

Soit f(x)= $\sqrt{6x-2}$ définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

f =uov avec $\begin{cases} u(x) = 6x-2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$. On a : $\begin{cases} u'(x) = 6 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{6x-2}} = \frac{3}{\sqrt{6x-2}}$$

Conséquences :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I⊂R. Soit n∈N*.

- u^n est dérivable sur I et $(u^n)'=nu'u^{n-1}$.
- Si u ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=\frac{-nu}{u^{n+1}}$.
- Si u ne prends que des valeurs positives ou nules sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dém :

Il suffit d'appliquer la propriété précédente en composant u suivie :

- $g(x)=x^n$ pour la première propriété.
- $g(x)=\frac{1}{x}$ pour la 2ème propriété.
- $g(x)=\sqrt{x}$ pour la 3ème propriété. CQFD

6. Dérivation et variation.

Prop :

Soit f une fonction dérivable sur I c IR. Si, sur I on a :

- f'>0 alors f est strictement croissante sur I.
- f'<0 alors f est strictement décroissante sur I.
- f'=0 alors f est constante sur I.