TS

BAC BLANC n°1 DE MATHEMATIQUES.

La qualité, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte trois pages.

Exercice 1 (4,5 pts) :

1. Soit f la fonction définie sur $\Re \setminus \{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x-1)^3}$.

   a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x≠1, $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)^3}$.

   b. En déduire une primitive F de f sur]-oo;1[.

2. Soit g la fonction par $g(x)=\dfrac{6x-3}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

   a. Sur quelle intervalle g est-elle définie ? Justifiez.

   b. Déterminez une primitive de g sur =]-oo;-1[. Justifiez.

Exercice 2 (5,5pts) : *Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité.*

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la transformation ponctuelle f qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' par la relation $z'=z^2+1$.

1. Soit A($\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$), Déterminez l'affixe du point A', image de A par f puis prouvez que O,A et A' sont alignés.
2. Déterminez les points qui ont pour image le point O.
3. Démontrez que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4. Existe-t-il des points invariants (c'est à dire qui ont pour image eux même) par f ? Si oui, précisez leurs affixes respectives.
5. Soit θ un nombre réel de l'intervalle $[0;2\pi[$ et N le point d'affixe $e^{i\theta}$.

   a. Démontrez que N appartient au cercle (X) de centre O et de rayon 1.

   b. Lorsque θ varie, démontrez que N', image de N par f , reste sur un cercle dont on précisera le rayon.

   c. Vérifiez que $\overrightarrow{ON'}=2\cos\theta\,\overrightarrow{ON}$. En déduire que O, N et N' sont alignés.

   d. Expliquez la construction de N'.

Exercice 2(5,5 pts) : *Candidats suivant l'enseignement de spécialité.*

PARTIE A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

PARTIE B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation :

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2$$

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
b. Sachant que $a^2 - 250507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\ ;\ b)$.

3. On suppose que le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

PARTIE C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.
2. Montrer que ces deux facteurs sont premiers.
3. Cette écriture est-elle unique ?

Exercice 3 (2,5 pts) :

On rappelle que :

$$\cos(\theta+\theta')=\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')$$
$$\sin(\theta+\theta')=\sin(\theta)\cos(\theta')+\sin(\theta')\cos(\theta)$$

Question :

Pour tout complexes z et z' de module 1.

1. Démontrer que $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ (2π) et que $arg\left(\frac{1}{z}\right)=-arg(z)$ (2π)
2. En déduire que $arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$ (2π).

Exercice 4 (7 pts):

Partie A

La fonction f est définie sur [0;+oo[par $f(x)=(20x+10)e^{\frac{-1}{2}x}$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (Unité graphique 1cm).

1. Etudiez la limite de f en +oo.
2. Etudiez les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Etablir que l'équation f(x)=10 admet une unique solution α strictement positive sur]0;+oo[. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α .
4. Tracez la courbe C.

Partie B

On note y(t) la valeur en degré Celsius de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant t=0, est y(0)=10. On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à [0;+oo[associe y(t), est solution de l'équation différentielle (E) :

$y'+\frac{1}{2}y=20\ e^{\frac{-1}{2}t}$.

1. Vérifiez que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de (E) sur [0;+oo[.
2. On se propose de démontrer que f est l'unique solution de (E) définie sur [0;+oo[qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   a. On note g une solution quelconque de (E), définie sur [0;+oo[et qui vérifie g(0)=10. Démontrez que la fonction g-f est solution sur [0;+oo[de l'équation différentielle (E') :
   $y'+\frac{1}{2}y=0$.
   b. Résoudre (E').
   c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-t-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.