Ordre, intervalles,valeurs absolues et inéquations

Les intervalles

Ex :

Quelques questions…

- -0,25 appartient-il à [-¼ ;3[?
- 3 appartient-il à]3 ;10[?
- 0 appartient-il à]-5 ;2]
- 10^5 appartient-il à $[-2{,}7;+\infty[$?
- $\sqrt{2}$ appartient-il à $]-\infty;1{,}4]$?

Ex :

1 . Donner un exemple d'intervalle fermé dont les bornes sont ...

a - des **entiers** :

b - des **fractions** :

2 . Cocher **vrai** ou **faux** :

[b ; $\sqrt{2}$] est un intervalle fermé si b = -1 .	**Vrai**	**Faux**
[b ; $\sqrt{2}$] est un intervalle fermé si $b > \sqrt{2}$.	**Vrai**	**Faux**
[b ; $\sqrt{2}$] est un intervalle fermé si $b < \sqrt{2}$.	**Vrai**	**Faux**
[-2,3 ; c] est un intervalle fermé si c = -2,3	**Vrai**	**Faux**
[-2,3 ; c] est un intervalle fermé si c > -2,3	**Vrai**	**Faux**
[-2,3 ; c] est un intervalle fermé si c ≤ -2,3	**Vrai**	**Faux**

Ex :

On pose $I = \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right[$ et $J = \left]\frac{1}{2};3\right]$. **Vrai ou Faux ?**

1°/ a) $\frac{1}{2} \in I$ b) $\frac{1}{2} \in J$ c) $2 \in J$ d) $3 \in J$

2°/ Il existe des réels appartenant à la fois à I et à J.

3°/ Il existe des réels n'appartenant ni à I ni à J.

Ex :

1) Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

a) les réels x tels que $x < 0$;

b) les réels x tels que $-1 \le x \le 1$.

2) Ecrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités :

a)] - 2 ; 6 [;

b)] - ∞ ; 5 [.

Ex :

On pose $A = \left]-\infty ; \sqrt{2}\right]$, $B = [0 \; ; \; 7[$ *et* $C =]-1 \; ; \; 3]$.

1) Déterminer $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cap B \cap C$.
2) Derminer les ensembles D et E suivants : $D = A \cup C$ et $E = D \cap B$.

Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J, donner leur réunion $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ et leur intersection $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

1) $\mathrm{I} = [-3 ; 8[$ et $\mathrm{J} = [4 ; +\infty[$.

2) $\mathrm{I} =]4 ; +\infty[$ et $\mathrm{J} =]-\infty ; 4]$.

Ex :

Dites, dans chaque cas, à quel intervalle appartient x et représentez cet ensemble sur une droite graduée.

a) $-1 \leq x \leq 2$ b) $x < -\dfrac{3}{2}$ c) $x \geq 10$

d) $0 < x \leq 3$ e) $x \leq -1$ f) x est un réel strictement positif

Ex :

Traduisez par des inégalités l'appartenance d'un réel x à chacun des intervalles.

a) [-2 ;3] b)]-1 ;0] c) $]-\infty$;4[

d)]2 ; $+\infty$[e)] $-\infty$;0[f)]3 ; $\dfrac{11}{2}$ [

Opérations sur les encadrements

Ex :

Soient x et y deux nombres réels tels que $3{,}5 < x < 3{,}6$ et $-2{,}5 < y < -2{,}4$.
Encadrer les nombres suivants :

1) $3x + 2$;
2) $\dfrac{1}{3x+2}$;
3) $5 - 2x$;
4) $-y\,x$;
5) xy.

Ex :

Soient x et y deux nombres réels tels que $-3{,}5 < x < -3{,}4$ et $2{,}5 < y < 2{,}6$.
Encadrer les nombres suivants.

1) $4y + 3$;

2) $\dfrac{1}{4y+3}$;
3) $7 - 3y$;
4) $-x\,y$;
5) xy.

Valeurs absolues

Ex :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $|x-5| = 12$.
2) $|3-x| \leq 5$.
3) $|x-5| = -2$.
4) $|x+7| > 2$.

Ex :

1. Ecrire sans le symbole $|\ |$ les nombres suivants :

a) $\left|1-\sqrt{2}\right|$

b) $|a|$ pour a négatif

c) $\left|\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\right|$

2. Calculer :

a) $a = -\left|-\dfrac{2}{3}\right| + \left|-\dfrac{13}{9}\right|$

b) $x - |x+1|$ quand $x = -5$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $|-2x| = 7$

b) $|-x| = -5$

$|-x+4| = 0$

Ex :

Ex : Résoudre. Donner le résultat sous la forme d'intervalles et représentez les sur une droite graduée.

a) $|x-3| < 4$ b) $|x-8| \geq 2$ c) $|x+3| \leq 2$

Ex : calculer dans les cas où x≥0 et x≤0.

a) $\dfrac{|x|+x}{2}$ b) $|-4x| + |4x|$ c) $\left|\dfrac{3x}{-2}\right| + \dfrac{4}{3}x$

Ex :

a) $|x-3| \leq 4$ b) $|x+4| > 3$ c) $|2x-1| < 3$

Encadrements

Ex :

1) Sachant que $2 < \sqrt{7} < 3$, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{7}$ sans utiliser la touche racine de votre calculatrice . Décrire précisément la méthode utilisée .

2) On suppose maintenant que $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ et que $2{,}3 < \frac{7}{3} < 2{,}4$ déterminer un encadrement de $\frac{7}{3} - \sqrt{7}$ puis un encadrement de $\frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{3}}$ en utilisant les encadrements précédents .

3) Ecrire le nombre $\left|\frac{7}{3} - \sqrt{7}\right|$ sans utiliser les valeurs absolues.

4) Résoudre l'équation $|x+2| = \frac{5}{2}$.

5) Résoudre l'inéquation $\left|x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{2}{3}$.

Ex :

1) Sachant que $3 < \sqrt{11} < 4$, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{11}$ sans utiliser la touche racine de votre calculatrice . Décrire précisément la méthode utilisée .
2) On suppose maintenant que $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$ et que $3{,}4 < \frac{24}{7} < 3{,}5$ déterminer un encadrement de $\frac{24}{7} - \sqrt{11}$ puis un encadrement de $\frac{\sqrt{11}}{\frac{24}{7}}$ en utilisant les encadrements précédents .
3) Ecrire le nombre $\left|\sqrt{11} - \frac{24}{7}\right|$ sans utiliser les valeurs absolues.
4) Résoudre l'équation $|x+4| = \frac{3}{2}$.
5) Résoudre l'inéquation $\left|x - \frac{2}{3}\right| > \frac{1}{3}$.

Ex :

1. A l'aide de la calculatrice,

a) Donner une valeur approchée par excès de $\frac{5}{21}$ à 10^{-3} près. Justifier votre réponse à l'aide d'un encadrement.
b) Donner un encadrement de $-\sqrt{3}$ d'amplitude $0{,}5$.
c) Donner l'approximation décimale par excès d'ordre 5 de $\sqrt{5}$.

2. Déduire de l'encadrement de $\sqrt{7}$ suivant $2{,}6 \leq \sqrt{7} \leq 2{,}7$ un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Inéquations

Ex :

a) $-2x+4 \geq 4x-8$ b) $(3x-6)(2x+4)(x-1) > 0$

Ex :

$a)(2x+3)(3x-1)(-x+2) > 0$

$b)(-x+2)^2-(7+3x)^2 \geq 0$

$c)\dfrac{2x-3}{(3x+1)(2x-4)} < 0$

$d)|2x-4| \leq \dfrac{2}{3}$

Ex :

$a)(2x-3)(-3x+2)(x-8) > 0$

$b)(4x-7)^2-(6x+3)^2 \leq 0$

$c)\dfrac{-2x-8}{49x^2-64} \geq 0$

$d)\dfrac{5x-15}{25x^2+16+40x} < \dfrac{2}{5x+4}$

$e)|2x-6| \leq 1$

$f)\dfrac{2x-3}{-3x+7} = \dfrac{-6x-8}{9x+1}$

Ex :

$a)-1 \leq -2x+3 < 2$

$b)|x+2| \geq 4$

$c)x+\frac{3}{4} \leq \frac{2}{3} ou -3x+2 < -2x+1$

$d)\dfrac{(-2x+3)(4x-1)}{16x^2+1-8x} = 0$

Ex :

a) $-1 < \dfrac{-2x+3}{-3} \leq 2$

b) $|x+2| \leq \dfrac{1}{3}$

c) $(4x-8)^2 > 16$

d) $\dfrac{(-2-x)(3x+6)}{64-4x^2} \leq 0$