Fonctions

---Calculs---

Ex : Fonctions affines par morceaux

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x-4 & si & x < -3 \\ x+2 & si & -3 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x+2 & si & x > 0 \end{cases}$$

1. **Calculer f(-5), f(-3), f(0) et f(4)**
2. **Construire en justifiant le tableau de variation de f sur R en y indiquant les extremums.**
3. **Déterminer le ou les antécédents de 1 par f. Justifier.**
4. **En cadrer f(x) pour**
   a. $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ **b.** $x \in [-\pi;\pi]$

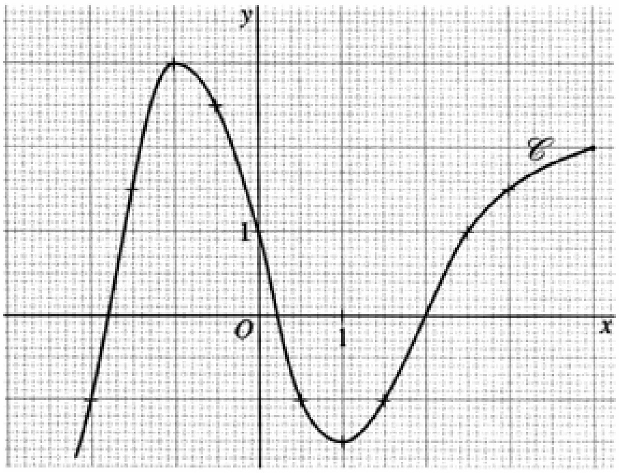
Ex : Antécédents.

1. **Déterminer les antécédents de 0 par f(x)=**$\frac{-5}{-x+2} - 4x$ **sur] 2 ;+oo[**
2. **Déterminer les antécédents de** $\frac{-11}{6}$ **par g(x)=**$\frac{4x+2}{3} + \frac{3-2x}{6}$ **sur R.**

---Lecture Graphique---

Ex :

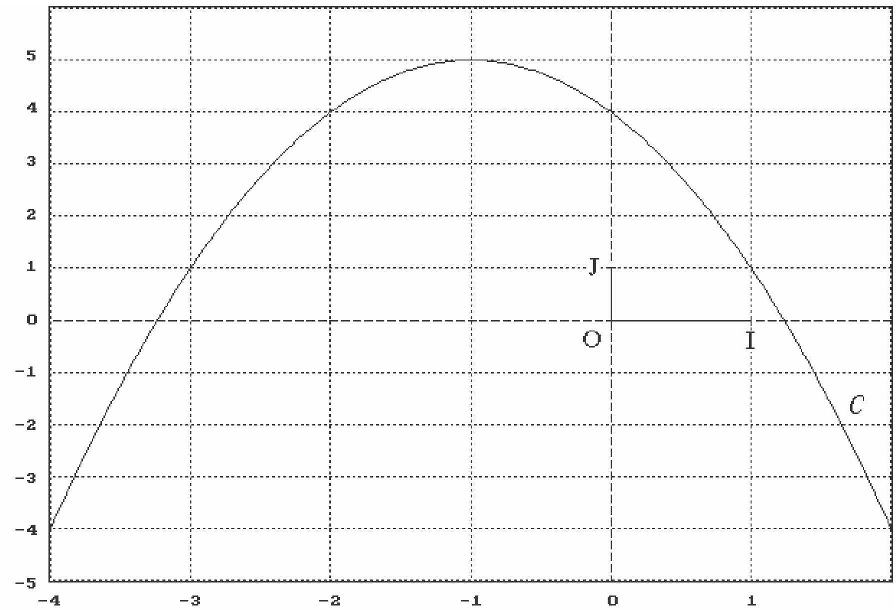
La courbe C ci-dessous a pour équation : y = f(x) sur [-2,2 ;4]



1.a. Dresser son tableau des variations.
b. Donner ses extremums (s'ils existent).
c. Si $x \leq -1$, dans quel intervalle se situe son image ?
2 a. Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 1 (on donnera s'il y a lieu une valeur arrondie à 0,2).
b. Donner un encadrement à 0,2 près des solutions de l'équation f(x) = 0.
3 a. Trouver l'ensemble des images par f de tous les réels de l'intervalle [–1 ; 1].
b. Même question pour l'intervalle [0 ; 3], puis pour l'intervalle]–2 ; –0,5[.

Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

Partie A : Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ dont la courbe représentative (C) est la suivante.



1) A l'aide du graphique, déterminer l'ensemble de définition de f.
2) a) Calculer $f(-2), f\left(\frac{2}{5}\right)$ et $f\left(-2\sqrt{3}\right)$ et déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel ils appartiennent.
b) Quelle est l'image par f de -2 ?
3) a) Déterminer graphiquement et en justifiant, le ou les antécédent(s) de 5 par f.
b) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 1. Interpréter le résultat.
4) Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 4$.
6) Quel est le maximum de la fonction f ? Préciser pour quelle valeur de x .

Partie B : Soit g la fonction définie sur R par g(x)= 2x + 8 .

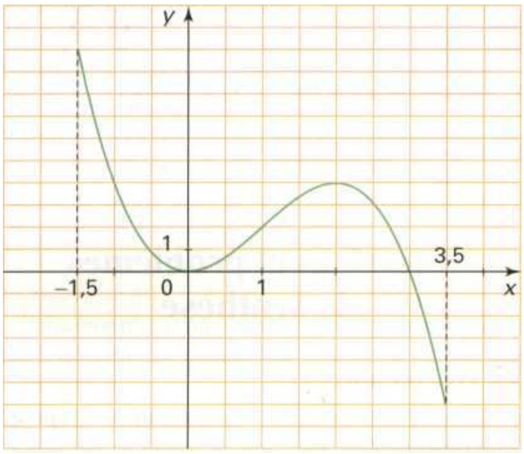
1) Quelle est la nature de g ?
2) Mener l'étude des variations de g sur R .

3) Donner la représentation graphique de g sur le graphique ci-dessus.
4) Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur R.

Partie C :
1) Résoudre par le calcul l'équation f(x) = 2x + 8.
2) Retrouver graphiquement le résultat précédent.

Ex : Vrai ou faux ?

La fonction $f : x \mapsto -x^3 + 3x^2$ définie sur [-1,5 ; 3,5] est représentée par la courbe suivante. Cochez la case si la proposition correspondante est vraie.



1. 3,5 a pour image -6 par f.
2. 3 est l'image de 0 par f.
3. f($1-\sqrt{3}$) = f(1) = f($1+\sqrt{3}$).
4. Le point de coordonnées $\left(\frac{-1}{2};1\right)$ est sur la courbe représentative de f.
5. $f\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$.
6. L'équation f(x) = $\frac{-1}{2}$ admet une seule solution.
7. Si x$\in$ [-1,5 ; 3], alors f(x) $\geq$ 0.

8. Le tableau de signes de f est :

x	-1,5 0 3 3,5
f	- 0 + 0 -

9. La courbe représentative de f a deux points d'abscisse nulle.
10. f est constante sur [0 ; 3].
11. f(2)<f(3).
12. f(-1)>f(0).
13. Si -1 ≤x≤ 0, alors 0 ≤ f(x) ≤ 4.
14. Si 0 ≤ x ≤ 3, alors 0 ≤ f(x) ≤ 4.
15. L'ensemble des solutions de l'équation f (x) = 2 est {-0,7; 1 ; 2,7}.
16. L'ensemble des solutions de l'équation f (x) = f(-1) est {-1 ; 2}.
17. L'ensemble des solutions de l'inéquation f (x) ≥ est |-1,5; 3].
18. L'ensemble des solutions de l'inéquation f(x) <4 est |-1 ; 3,5[.

Ex :

Un automobile roule à une vitesse v (en km/h). on a $0 \leq v \leq 130$. Sa distance de freinage (en m) est donnée par la formule $d(v)=\frac{v^2}{200}+\frac{v}{5}$.

1. Tracez la courbe représentative de d dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ bien choisi.
2. Si un automobiliste roule à 120km/h, peut-il éviter un obstacle qu'il aperçoit soudain à 90m ? On fera une construction graphique pour expliquer la réponse.
3. Un animal traverse la route à 20m d'un véhicule. Quelle est la vitesse maximale que peut avoir ce véhicule pour pouvoir freiner à temps ? On fera une construction graphique pour expliquer la réponse.

--- Courbes et Etude--

Ex :

Pour chaque fonction, donner son domaine de définition, un tableau de valeur et tracer la courbe représentative. Par observation de cette courbe, donner le tableau de variation de la fonction et sa parité.

f(x)= $\frac{x^3}{3x^2-2}$

g(x)= $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Ex :

Soit $f(x)=x^2-16x+15$
Calculer f(8) et f(-8). Conclusion ?
Donner la forme canonique de f.
Résoudre f(x)=0
Etudier les variations de f.
Dresser le tableau de variation de f. En déduire les coordonnées du point A extremum de la courbe représentative de f.
Tracer la courbe représentative de f.
Quelle serait l'équation de cette courbe dans un repère centré sur A ? Justifier

Ex : graphiques et équations

Soit $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ et $g(x)=2x+1$.

1. **Déterminer les domaines de définition de f et g.**
2. **Dresser un tableau de valeur approprié puis tracer les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.**
3. **Donnez par lecture graphique le tableau de variation de f sur R.**

4. **Résoudre graphiquement f(x)=g(x) et f(x)>g(x). Expliquer.**
5. **Vérifier la question 3. par le calcul.**

Ex :

Soit $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

1. Expliquez pourquoi le domaine de définition de f est R.
2. Déterminez la parité de f. Quelle est la symétrie intéressante ?
3. Dressez un tableau de valeurs de f sur [0 ;10].
4. Tracez la courbe de f dans un repère orthonormé sur [0 ;10] puis sur [-10 ;0].
5. Par lecture graphique, dressez le tableau de variation de f sur [-10 ;10].
6. Résoudre graphiquement f(x)=-1 et indiquez votre construction.

Ex :

On considère la fonction f définie sur R par : f(x) = $\dfrac{-1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$

1. Montrer que f(x) s'écrit : f(x) = $\dfrac{-1}{2}(x-1)^2 + f(1)$

En déduire que f(1) est le maximum de f sur R.
Tracer point par point la parabole Cf représentant cette fonction dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

2. Résoudre algébriquement f(x) > x.

En déduire les abscisses des points de la courbe Cf ayant une ordonnée plus grande que leur abscisse.

3.a. Tracer la courbe H d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ Résoudre graphiquement $\dfrac{-1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x}$.

3.b. Factoriser l'expression $-x^3 + 2x^2 + x - 2$ (on peut remarquer que $-x^3 + 2x^2 = (-x+2)x^2$ …)
En déduire la résolution algébrique de l'équation précédente.

---Problèmes---

Ex : Mise en boite.

On veut confectionner une boîte parallélépipédique à base carrée, sans couvercle. L'aire totale devant mesurer 48 dm2, le problème est de déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.
On désigne par h la hauteur de la boîte et par a la longueur du côté de la base carrée.

1. Exprimer h, puis le volume V de la boîte en fonction de a. Montrer que a <$4\sqrt{3}$.
2. En calculant V pour diverses valeurs de a, faire une conjecture sur les dimensions cherchées.
3. On pose a = 4 + x. Montrez que V = $\dfrac{1}{4}$ (128 – x² (x + 12)).

En déduire que V est maximal pour x = 0.
4. Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.

Ex :

ABC est le triangle rectangle tel que AB=8,AC=6cm et BC=10. M est un point de [BC] et on note BM=x. Par M, on trace les perpendiculaires à (AB) et (AC) : elles coupent [AB] et [AC] en P et Q. On note A(x) l'aire de MQAP. Faites un dessin.

a. Démontrer que MP=0,6x.
b. Démontrer que CM=10-x puis en déduire que MQ=8-0,8x.

Montrer que $A(x)=-0,48x^2+4,8x$ pour x variant de 0 à 10.

a. Dresser un tableau de valeurs de A sur [0 ;10].
b. Tracer la courbe représentative de A dans un repère orthogonal.
c. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de A sur [0 ;10].
d. Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire de MQAP sera maximale.

Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

Un bijoutier fabrique x montres chaque mois.
Le bénéfice réalisé B(x), exprimé en centaines de euros, sur la vente de x montres est :
$B(x)=(x-9)^2-(x-9)(2x-12)$.

1) Factoriser B(x).
2) Développer B(x).
3°) a) Calculer B(x) pour x = 7 et interpréter le résultat en termes de fonctions et pour le bijoutier.
b) Sur un an, le bijoutier a vendu en moyenne $\frac{15}{4}$ des montres par mois. Quel a été son bénéfice mensuel ?
4°) Résoudre B(x) = 9. Interpréter le résultat en termes de fonctions et pour le bijoutier.

Compléter le tableau de valeurs suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B(x)											

Tracer la courbe représentative de la fonction B dans un repère adapté.
Etablir le tableau de variations de la fonction B sur son ensemble de définition.
Pour quel nombre de montres vendues le bénéfice est-il maximal?
Déterminer le nombre de montres à vendre chaque mois pour avoir un bénéfice positif

Ex :

La trajectoire d'une balle est donnée par $f(x)=-5x^2+10x+15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air exprimé en secondes et f(x) la hauteur en mètres. On sait que $x \in [0 ;3]$.

1. Dressez un tableau de valeurs de f tous les 0,5.
2. Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthonormé bien choisi.
3. Déterminez graphiquement la hauteur maximale de la balle. Faite une construction et expliquez.
4. Déterminez graphiquement le temps de vol de la balle. Expliquez.

Ex : problème d'aire

Dans un carré ABCD de côté 1cm, on veut construire une croix dont l'aire est la moitié de celle du carré. On désigne par x la largeur de chaque bande de la croix comme l'indique le dessin. Déterminer la valeur exacte de x.

Ex : un minimum.

Le but de l'exercice est de déterminer la position de M sur [AC] pour que la somme des volumes des 2 cubes soit minimale. On donne AB=BC=1 et on pose AH=x où $x \in [0\ ;1]$. On note V la fonction qui à x fait correspondre la somme des volumes des cubes.

1. **Montrez que $V(x)=3x^2-3x+1$. Justifiez**
2. **Dans un repère orthogonal bien choisi, tracez la courbe de V pour $x \in [0\ ;1]$.**
3. **Déduisez-en la position de M sur [AC] pour répondre au problème. Justifiez.**