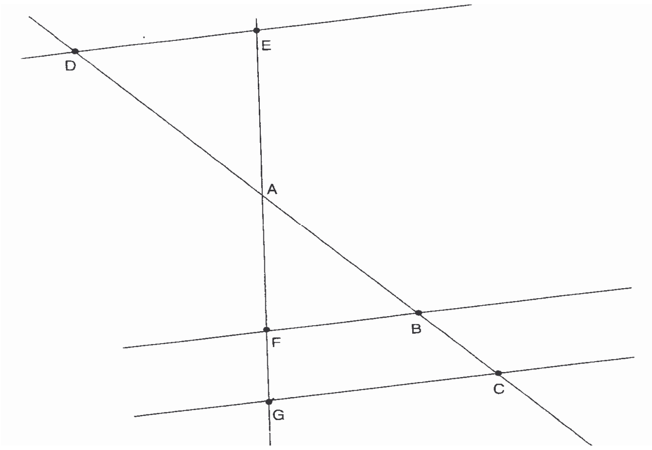
Configurations du plan

---Exercices de calcul---

Ex :



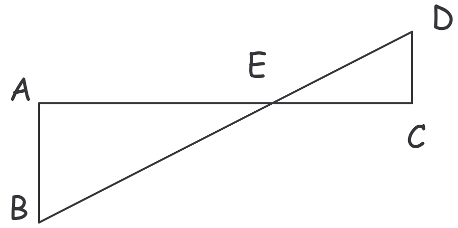
Sur la figure ci-dessus, qui n'est pas dessinée en vraie grandeur, les droites (BF) et (CG) sont parallèles.

1) On donne : AB=5 ; BC = 4et AF=3. Calculer AG puis FG.
2) On donne AD = 7 et AE = 4,2. Démontrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.

Ex : Thalès et Pythagore

AB=3,4 ; AE=4,8 ; BE=6 ; ED=3 et AC=9,5.

1. ABE est-il rectangle ?
2. A-t-on (AB)//(CD) ?



Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

Calculer le volume d'un cornet de glace :
Extérieurement celui-ci se présente sous la forme d'un cône de révolution de hauteur h =15cm et de diamètre d = 5cm , surmonté d'une demi boule de même diamètre . On donnera le résultat à 1mm^3 près par excès

Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

(C) est un cercle de centre O, de rayon 4 cm et [AB] est l'un de ses diamètres.
La médiatrice de [OB] coupe le cercle en D et E.

1) a) Justifier que OD = BD.
   b) Déterminer la nature du triangle OBD.

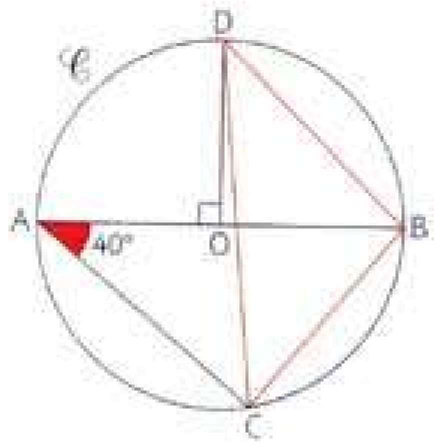
2) a) Quel est la nature du triangle ADB ? Justifier.
   b) Montrer que $O\hat{D}A = 30°$.

c) Déterminer les mesures des autres angles du triangle ODA de deux façons.

3) Calculer AD.

Ex : Par Cathy brunner, Lycée des Flandres, Hazebrouck.

La figure ci –dessous n'est pas à l'échelle et n'est pas à reproduire.

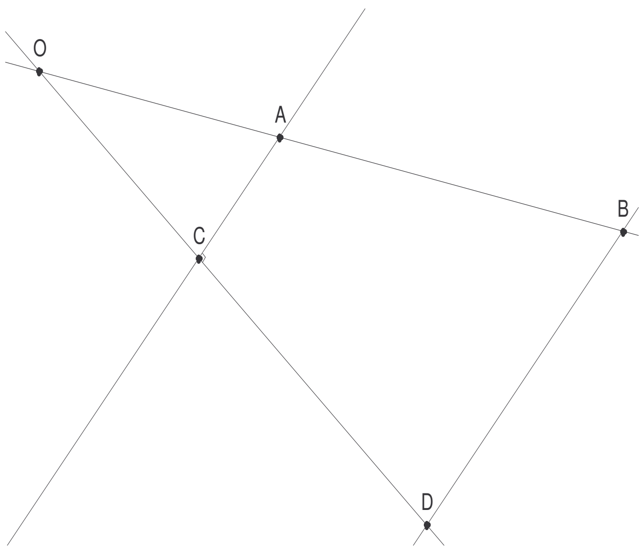


c est un cercle de centre O et de rayon 4 cm ,[AB] un diamètre.
D est un point de c tel que $\widehat{BOD} = 90°$.

1) Déterminer la nature du triangle ADB.
2) Justifier la nature du triangle OBD.
3) Calculer la longueur DB puis AD.

4) C est un point du cercle c tel que $\widehat{BAC} = 40°$.Calculer les mesures des angles du triangle BCD.

Ex : géométrie et caluls



On sait (CA)⊥(OD), (BD)⊥(OD), $A\hat{O}C = 30°$. OA=10cm, BD=15cm.

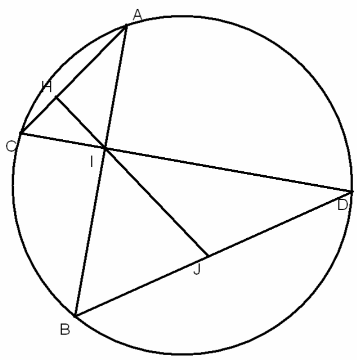
1. Calculer AC.
2. Calculer OC (Arrondir à 0,1 près)
3. Calculer OD et OB (Arrondir à 0,1 près)

<u>Rem</u> : il est interdit d'utiliser 2 fois la même méthode.

Ex :

Partie I

Considérons la figure ci-contre :
J est le milieu de [BD], (DC)⊥(AB)



1) Montrer que IDJ est isocèle en J.
2) En déduire $I\hat{D}J = D\hat{I}J$.
3) Montrer que $I\hat{D}J = C\hat{A}B$.
4) Montrer que $J\hat{I}B = H\hat{I}A$
5) En déduire que (HI)⊥(AC) (Utiliser des codes pour les angles égaux, ça aide…)

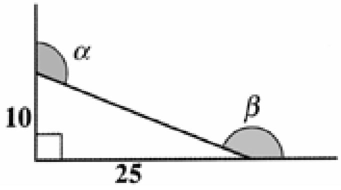
Partie II

On donne IB=8cm et BD=10cm.

1) Calculer ID
2) Calculer $I\hat{B}D$ puis $I\hat{D}B$ à 0,1 près.

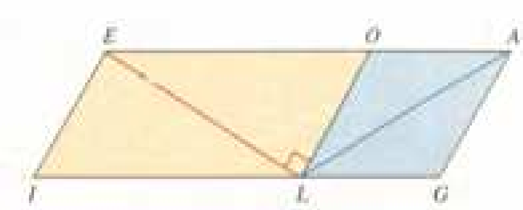
Ex :

Calculer une valeur approchée des angles α et β, puis de $\alpha + \beta$.
Pouvait-on prévoir ce dernier résultat ?



Ex : Léo à l'œil sur Olga…

Considérons la figure ci-dessous où ŒIL est un parallélogramme, LEO est rectangle en L et OLGA est un losange. On a EO=40mm, OL=21mm

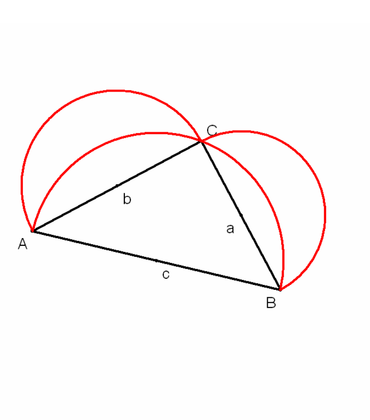


1. Calculer EL à 1mm .
2. Construire la figure et placer J, centre de OLGA.
3. Calculer $E\hat{O}L$ à 10^{-1} près.
4. En déduire $I\hat{E}O$=121,7°
5. Montrer que $L\hat{O}J=\frac{1}{2}L\hat{O}A$=60,9°
6. En déduire LJ puis LA.
7. Qu'y a-t-il d'étrange ?

Ex :

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre AB=5cm. Soit C€(C) tel que BC=4 cm. Soit J un point de [BC] tel que BJ=1 cm. La perpendiculaire à (BC) en J coupe (CO) en K.
Faites une figure claire.
Déterminez la nature de ABC.
Déterminez $A\hat{B}C$ à 0,1près.
Démontrez que OBC est isocèle et déduisez en $B\hat{C}O$.
5. Quelle est la nature de CJK ? Déterminez CK.
6. Que peut-on en déduire pour K ?

Ex : Les lunules d'hypocrate



Voici un triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [AB]. On pose BC=a, AC=b, AB=c. Démontrez que les lunules (zone délimitée en rouge) ont ensemble la même aire que ABC.

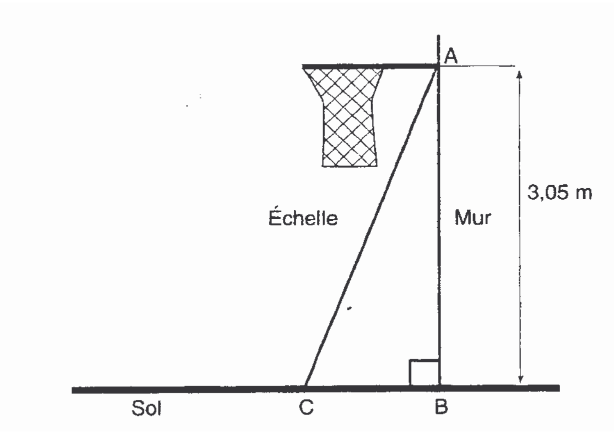
---Problèmes---

Ex :

1) Paul veut installer chez lui un panier de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long. À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour que son sommet soit juste au niveau du panier? (Donner une valeur approchée au cm près.)

2) Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. (Donner une valeur approchée au degré près.)

Ex :



Soit un cercle C de diamètre [AB] et de centre 0.
Soit M un point de ce cercle (distinct de A et B), et N l'image de M par là translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

1) Réaliser la figure qui sera complétée par la suite.

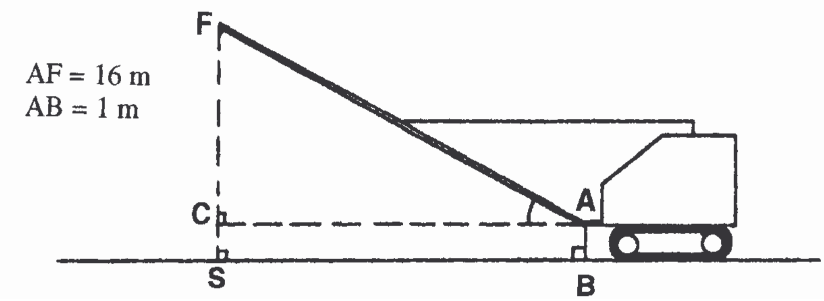
3) Quelle est la nature de AMNB ?

4) Soit P le symétrique de N par rapport au point B.
   a. Quelle est la nature du quadrilatère AMBP ?
   b. En déduire que P est le symétrique de M par rapport au point 0, et que P appartient au cercle C

5) a. Quelle est la nature du triangle MNP ?
   b. Comparer les aires du triangle MNP et du quadrilatère AMNB.
6) La droite (NO) coupe la droite (MB) en G.

7) Démontrer que la droite (PG) coupe le segment [MN] en son milieu.

Ex :



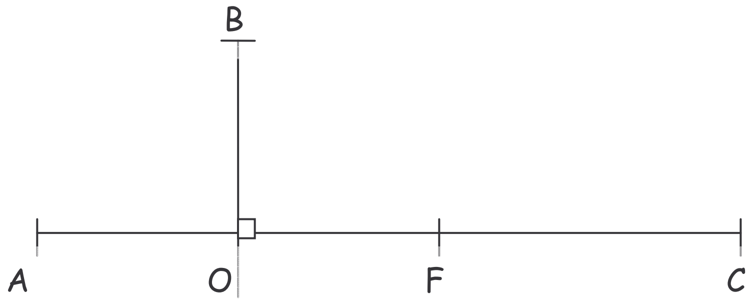
La longueur AF de la flèche de la grue est de 16m.
L'extrémité A de la flèche est à 1m du sol.

La grue, lors d'un déplacement, doit passer sous un pont interdit aux engins de plus de 7m de hauteur.
L'angle $\widehat{FAC}$ peut varier.

1) Quelle est la plus grande longueur possible de [FC] qui permet de passer sous le pont ?
2) Calculer dans ce cas la mesure de $\widehat{FAC}$ à 1 degré près.

Ex :

1) Reproduire en vraie grandeur la figure ci-dessous sur la feuille annexe en tenant compte des renseignements suivant :
    - L'unité est le cm.
    - Les points A,O,F et C sont alignés dans cet ordre.
    - AC=15 ; AO=OF=3 ; OB=6.
    - (BO) et (AC) sont perpendiculaires.
    - Vous compléterez votre figure au fur et à mesure des questions.



2) Prouver que AB=$3\sqrt{5}$ et que BC=$6\sqrt{5}$.

3) Démontrer que (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

4) a) Construire le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [FC] qui coupe (BC) en H.
   b) Démontrer que FHC est un triangle rectangle.
   c) Démontrer que (AB) et (FH) sont parallèles.
   d) Calculer CF puis CH.
5) Démontrer que BAF est un triangle isocèle.
6) a) Tracer la parallèle à (BF) passant par A. Elle coupe (HF) en G.
   b) Démontrer que ABFG est un losange et calculer son périmètre.

7) Montrer que le triangle OBC a la même aire que le losange ABFG.

Ex : symétriques de l'orthocentre.

Le but de ce problème est de démontrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés d'un triangle sont sur son cercle circonscrit.

Partie I : Construction

Réaliser une figure grande, propre et claire.
Soit un cercle de centre O et A,B et C trois points distincts du cercle tels que ABC ne soit pas rectangle. Placer l'orthocentre H de ABC. Soit H' le symétrique de H par rapport à [BC]. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit de ABC.

Partie II : Démonstration

1) Quelle est la nature de ADC. Justifier.
2) En déduire que (BH)//(CD).
3) De même montrer que (BD)//(CH).
4) Quelle est la nature de BHCD. Justifier. En déduire que [BC] et [HD] ont le même milieu, I.
5) Soit J l'intersection de [BC] et [HH']. Qu'est J pour [HH'] ? Justifier.
6) Montrer que (IJ)//(H'D).
7) En déduire la nature de HH'D puis celle de AH'D.
8) En déduire que H' est sur le cercle circonscrit de ABC.

Ex :Vers la droite d'Euler

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Placer G, le centre de gravité du triangle et I le milieu de [BC].
2. Rappeler sans la justifier la valeur de $\frac{AG}{IG}$.
3. Tracer (d), la médiatrice de [BC] et O, le centre du cercle circonscrit à ABC .
4. Tracer la hauteur issue de A. elle coupe (OG) en H.
5. Montrer Que (OI)//(HA)
6. En déduire que $\frac{OG}{HG}=\frac{AG}{IG}=2$.

Ex : la droite d'Euler

Soit (C) un cercle de centre O et A,B et C trois points de ce cercle.
I est le milieu de [BC].
On appelle A' le symétrique de A par rapport à O et H celui de A' par rapport à I.

1. Quelle est la nature de BHCA' ? Justifier.
2. Quelle est la nature de AA'C et AA'B ? Justifier.
3. Déduire de 1. et 2. que (BH)⊥(AC) et que (CH)⊥(AB).
4. Qu'est H pour ABC ? Justifier.
5. Trouver une médiane commune aux triangles AA'H et ABC. Justifier.
6. On rappel $\frac{AG}{AI}=\frac{2}{3}$. Montrer que AA'H et ABC ont le même centre de gravité.
7. En déduire que O,G et H sont alignés et $\frac{HG}{HO}$.

Ex : le triangle orthique

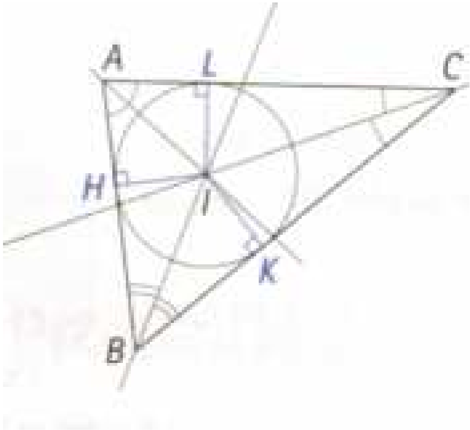
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et P,Q,R les pieds des hauteurs issues de A,B,C.
1) Montrer que B,R,H et P sont cocycliques (cad sur un même cercle).
2) En déduire $H\hat{B}R = H\hat{P}R$.
3) De même, montrer que $H\hat{C}Q = H\hat{P}Q$.
4) Examiner BRC et BQC puis comparer $R\hat{C}Q$ et $Q\hat{B}R$.
5) En déduire que (PH) est une bissectrice pour PQR.
6) Qu'est le centre du cercle inscrit de PQR pour ABC ?

Rem : on pourrait faire de même avec (QB) et (CR). PQR est appelé triangle orthique.

Ex : aire et cercle inscrit

Les 3 bissectrices de ABC sont sécantes en I. Le cercle inscrit dans le triangle est tangent en H,K et L aux côtés de ABC. On note r et rayon du cercle et p le périmètre de ABC.

1. Calculer les aires de AIC, BIC et AIB en fonction des côtés de ABC et de r.



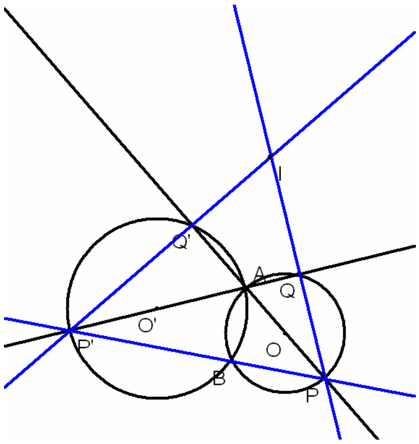
2. En déduire que l'aire de ABC est $A=\frac{1}{2}pr$.

3. Supposons Que ACB soit rectangle en A avec AB=5,4cm et BC=9cm. Quel serait le rayon de son cercle inscrit ? (évidemment pensez à 2.)

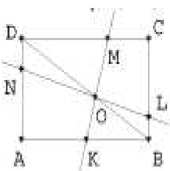
Ex : hauteur d'un triangle

Soit 2 cercles de centre O et O' sécants en A et B. (OA) et (O'A) recoupent le premier en Pet Q et le second en P' et Q'. On veut démontrer que (AB), (PQ) et (P'Q') sont concourantes.

1. Quels sont les natures de AQ'P' et APQ ? Justifiez.
2. Soit I l'intersection de (QP) et (Q'P'). Qu'est A pour P'PI ?
3. Démontrez que (AB) et (QQ') sont perpendiculaire.
4. Conclure.



Ex : Cocyclicité, par Jean-christophe Lazure, lycée Léonard de Vinci ,Calais.

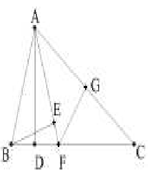


ABCD est un rectangle. O est un point de [BD]. Par O, une droite coupe [BC] en L et [AD] en N. Sa perpendiculaire en O coupe [AB] en K et [CD] en M.

Démontrez que (MN) est parallèle à (KL).
(Voir les cercles de diamètre [OD] et [OB].

Ex : Cocyclicité, par Jean-christophe Lazure, lycée Léonard de Vinci ,Calais.

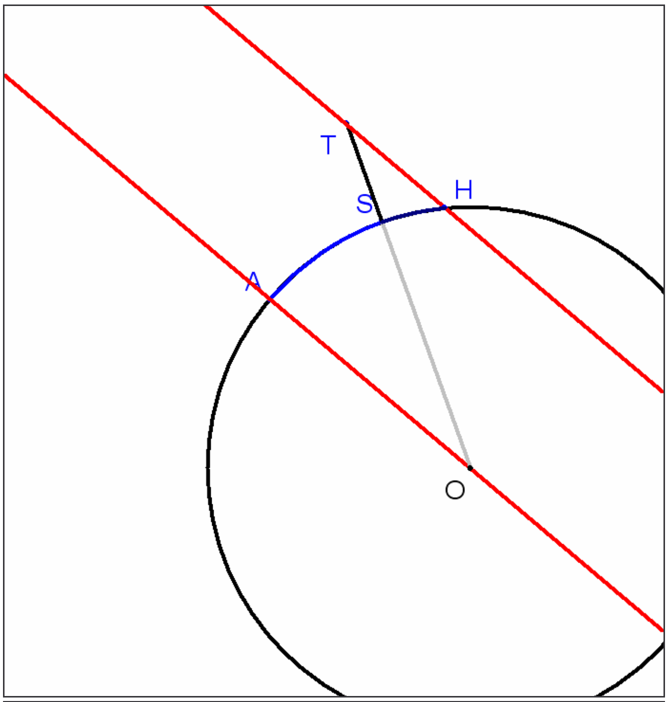
ABC est un triangle. La bissectrice de $B\hat{A}C$ coupe (BC) en F. On appelle D le pied de la hauteur issue de A Le point B se projette orthogonalement sur (AF) en E. Le point F se projette orthogonalement sur (AC) en G.



D,E et G sont-ils alignés ?

(Voir les cercles de diamètre [AB] et [AF])

Ex : Mesure du rayon de la terre par Eratosthène en -200 av JC.



Voici un schéma de la terre dont le centre est O. A est la position de la ville d'Alexandrie et S celle de Syène. A Syène un gnomon (grand baton) de 10m est représentée par le segment TS.

Eratosthène décide de faire comme si :

- ➔ les rayons du soleil (en rouge) sont parallèles.
- ➔ A,S et H sont alignés sur une droite.
- ➔ La tour est perpendiculaire au sol.

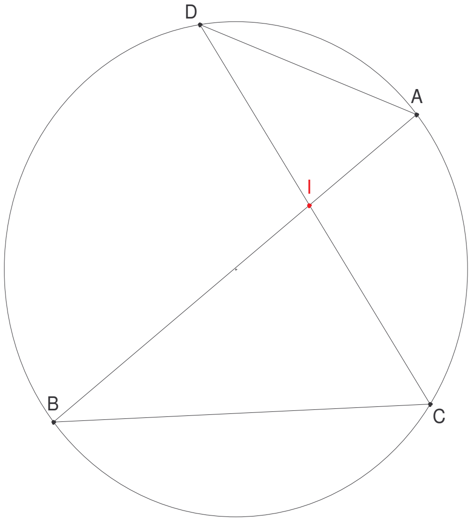
Il s'arrange alors, un jour tandis qu'il est midi à Alexandrie (soleil au zenith) pour mesurer l'ombre du gnomon à Syène. Cette ombre fait 1,20m. La distance Alexandrie- Syène est de 800km. Cela suffit pour calculer le périmètre de la terre et son rayon. En utilisant les choix d'Eratosthène :

1. Démontrez que $A\hat{O}S = S\hat{T}H$.
2. Déterminez $S\hat{T}H$ à 1° près.
3. En déduire le périmètre de la terre en utilisant la proportionnalité.
4. A l'époque, on savait que $\pi \approx 3{,}14$. En déduire le rayon de la terre trouvé par Eratosthène il y a plus de 22 siècles.
5. Aujourd'hui on sait que le rayon de la terre est de 6378km en moyenne. Quelle est l'erreur commise par Eratosthène en pourcentage ?

---Triangles isométriques et semblables---

Ex :

Considérons la figure ci-dessous. On donne BC=10cm, IB=8cm, AI=3cm et ID=4cm.



1) Montrer que AID et IBC sont semblables.
2) Donner le rapport de similitude de AID vers IBC.
3) En déduire AD et IC à 0,1 près.
4) Monter que IDA est rectangle. ***En déduire*** que IBC l'est aussi.
5) Calculer l'aire de BIC. Donner une relation entre l'aire de BIC et celle de AID. ***En déduire*** l'aire de AID.
6) Monter que IDA est rectangle. ***En déduire*** que IBC l'est aussi.
7) Calculer les valeurs de tous les angles des deux triangles à 0,1 près.
8) Soit J∈ [IA]. La parallèle à (BC) coupe [ID] en K. Montrer que IJK , IBC et IAD sont semblables.

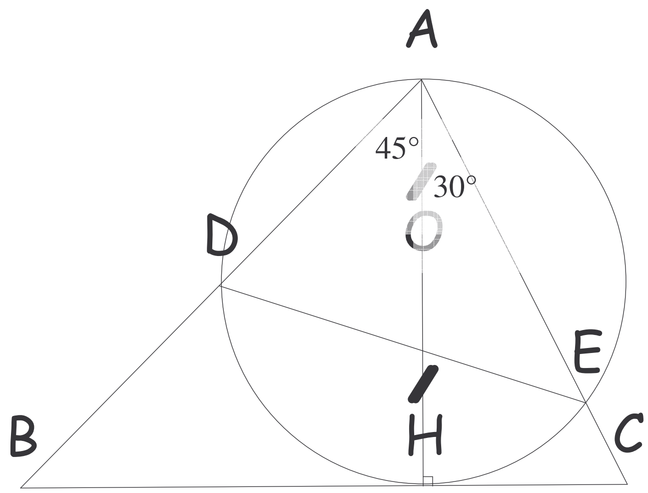
Ex :

1) Dans un repère orthonormal d'origine O, placer A(0 ;6), B(-3 ;0), C(4 ;0) et D(0 ;2)
2) Montrer que OAC et OBD sont semblables.
3) Utiliser les angles pour montrer que (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
4) Quel est le rapport des aires de OAC et OBD ? Justifier

Ex :

Soit un cercle de rayon r et de centre O, et ABC un triangle inscrit dans le cercle tel que $B\hat{A}C$ est aigu. Le symétrique de A par rapport à O est D. Soit H le pied de la hauteur de ABC issue de A.
1) Montrer que ABD et AHC sont semblables
2) En déduire que AB×AC=2r×AH.

Ex :



On donne $B\hat{A}H = 45°, H\hat{A}C = 30°$ et AH=6cm. [AH] est une hauteur de ABC. O est le milieu de [AH]. Le cercle de diamètre [AH] recoupe (AC) en E et (AB) en D.

1) Calculer AB et AC.
2) Quel est la nature de AHE ? En déduire que AE=$3\sqrt{3}$.
3) Montrer que $A\hat{H}E = 60°$.
4) Montrer que $A\hat{H}E = A\hat{D}E$.
5) Déterminer $A\hat{B}C$ puis calculer $B\hat{C}A$ et en déduire que BAC et EAD sont semblables.
6) Montrer que le rapport de proportionnalité de ABC et ADE est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7) Calculer BC.

8) En déduire DE=$\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

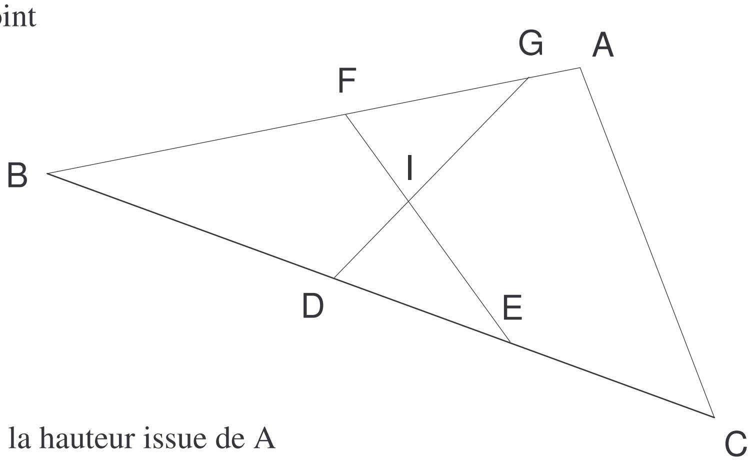
Rappel :

- *sin 30°=cos60°*=$\frac{1}{2}$
- *cos 30°=sin60°*=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ex : triangles isométriques.

Sur la figure ci-contre, BD=BF et BE=BG. I est le point d'intersection de [DG] et [EF].

1) Montrer que BFE et BDG sont isométriques.
2) En déduire $B\hat{G}D = B\hat{E}F$ et $G\hat{F}I = G\hat{D}E$.
3) Montrer que FIG et DIE sont isométriques.
4) Montrer que BFI et BDI sont isométriques.
5) En déduire que (BI) est la bissectrice de $A\hat{B}C$



Ex : triangles semblables

ABC est un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A

1. Montrez que ABH,AHC et ABC sont semblables.
2. En déduire les 3 séries de rapports de côtés.
3. En utilisant 2 rapports égaux, montrez que :
   a) BH×BC=BA²
   b) CH×CB=CA²
   c) HB×HC=HA
4. On donne BH=$\frac{5}{3}$et AB=$\sqrt{5}$. En utilisant la question 3. déterminez BC puis AC et enfin AH.
5. Déterminer le rapport de similitude entre ABC et AHC.
6. Donner une relation entre l'aire de ABC et celle de AHC.

Ex : triangles semblables et repère.

Dans $(o;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé , soit A(-4 ;0), B(3 ;11) , C(6 ;6), E(0 ;-5), F(1 ;-4) et G(3 ;-6)

1. Montrer que ABC et EFG sont semblables.
2. Quelle est la nature de ABC ? Justifier. En déduire celle de EFG.
3. Calculer l'aire de ABC.
4. Calculer l'aire de EFG de 2 façons différentes. Expliquer.

Ex : Triangles semblables et isométriques.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6cm. Soit M le point de [AB] tel que AM=4cm. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en D et la parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en E.

1. Faire un dessin en y codant toutes les hypothèses. On complétera le codage (angles et longueurs) au fur et à mesure de l'exercice.

2. a. Calculer AM, AD et MD.
   b. En déduire que ABC et AMD sont semblables. Préciser le rapport de similitude.

3. Démontrer de même que ABC et BEM sont semblables. Préciser le rapport de similitude.

4. Exprimer l'aire de AMD et celle de BME en fonction de l'aire de ABC.

5. a. Calculer $A\hat{M}E$ et $B\hat{M}D$.
   b. En déduire que AME et BMD sont isométriques.

Ex : Triangles isométriques.

Soit A et B deux points. Soit O le milieu de [AB] et O' celui de [AO]. Soit (C_1) le demi-cercle de diamètre [AO] et (C_2) le demi-cercle de diamètre [AB] tels que ces deux demi-cercles soient du même côté de (AB). Une droite passant par A coupe (C_1) en N et (C_2) en M.

1. Faire une figure.

2. a. Quelle est la nature exacte du triangle AON ? Justifier.
   b. Démontrer que $O\hat{A}N = O\hat{M}N$.
   c. En déduire que les triangles ANO et NOM sont isométriques.
3. a. Démontrer que (O'N) et (OM) sont parallèles.
   b. Que dire alors des tangentes à (C_1) en N et à (C_2) en M ?

4. Supposons que $N\hat{A}O = 60°$ et AO=4cm (ne pas refaire de dessin).
   a. Calculer AN et ON et donner leurs valeurs approchées à 10^{-2} près
   b. En déduire une approximation de l'aire de AOM à 1 cm² près.

Ex : Triangles isométriques

Soit ABCD un parallélogramme. Soit (d1) la bissectrice de $B\hat{A}D$ et (d2) celle de $A\hat{D}C$.
(d1) coupe d(2) en I et (DC) en E. (d2) coupe (AB) en F.

1. faire un dessin
2. Montrer que AID,AIF et DIE sont isométriques.
3. En déduire que ADEF est un parallélogramme.
4. Déduire de 2. que $A\hat{I}D = 90°$. En déduire la nature exacte de AFED.