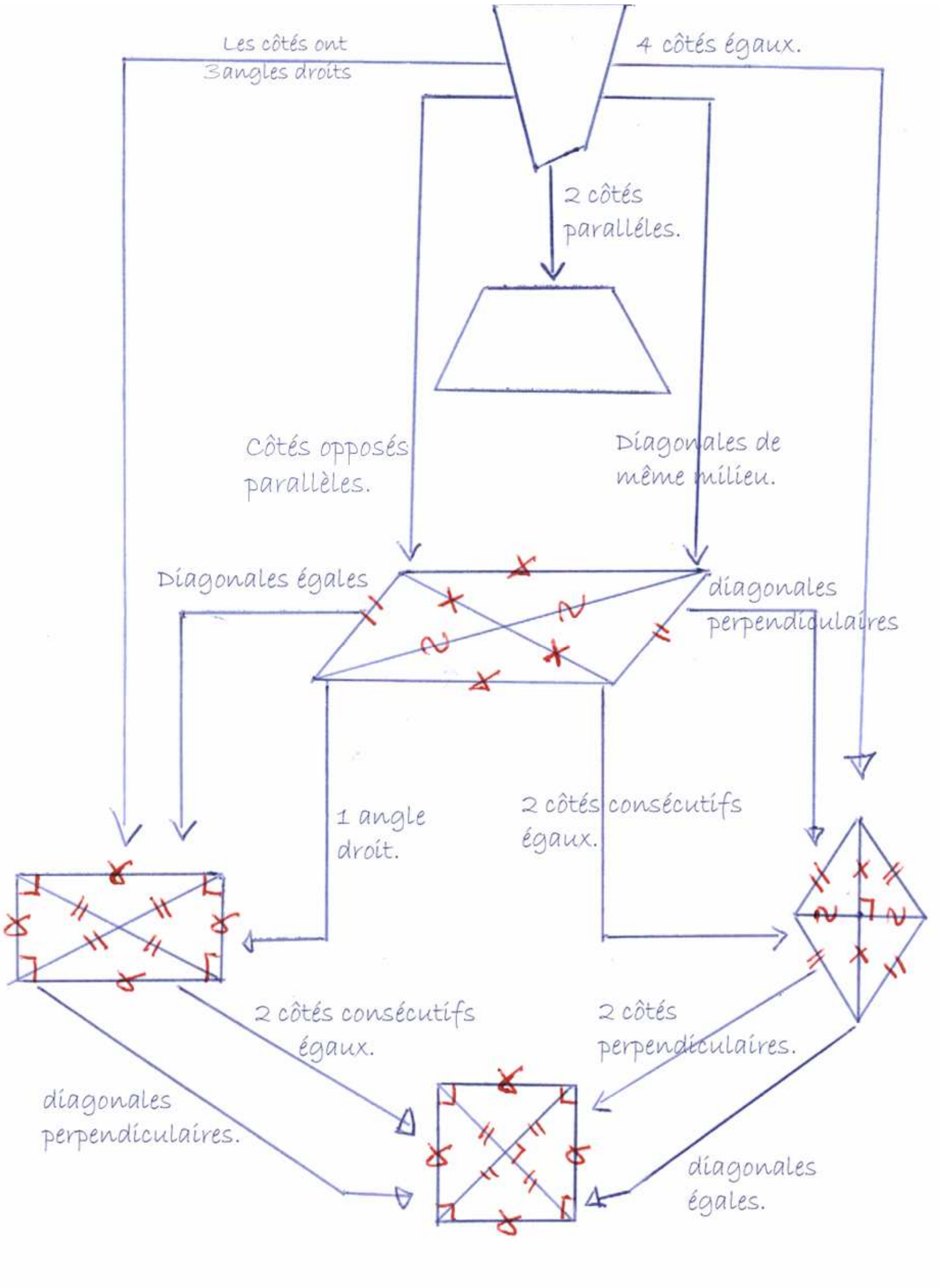
Géométrie plane

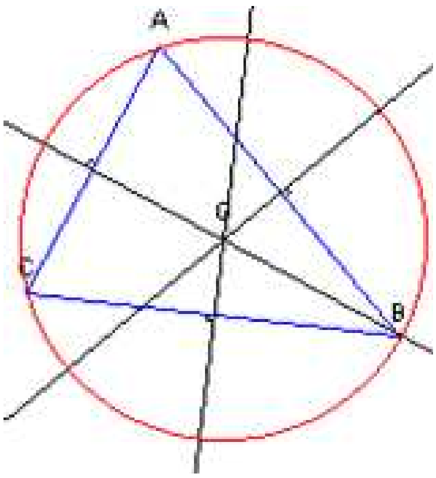
I. Les quadrilatères.



II. Les triangles.

1. Droites particulières

a) Médiatrices

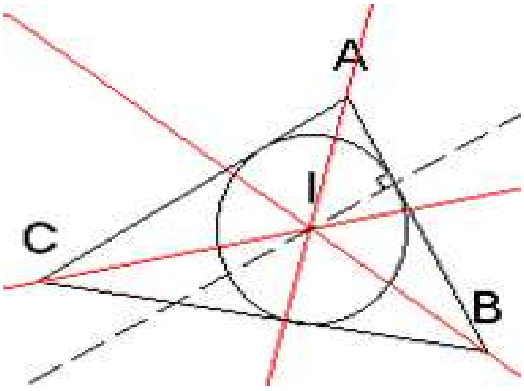


Déf : Une médiatrice coupe un segment perpendiculairement et en son milieu.

Th : Un point est sur la médiatrice de [AB] si et seulement s'il est équidistant des extrémités A et B du segment.

*Prop : Les 3 médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point O qui est le centre du **cercle circonscrit** de ABC.*

b) Bissectrices

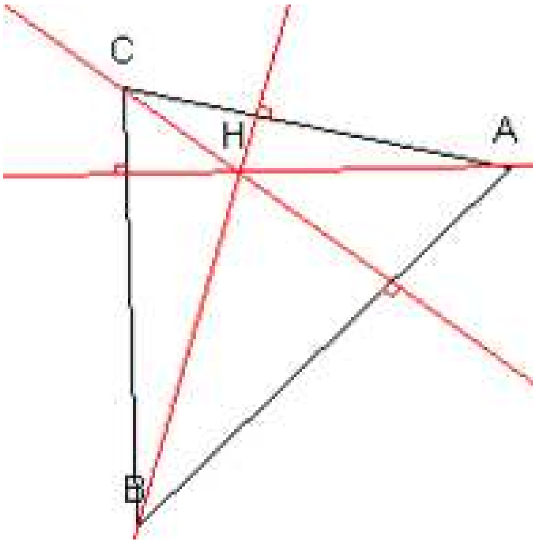


Déf : La bissectrice d'un angle coupe cet angle en 2 angles égaux.

Th : Un point appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est équidistant des 2 côtés de l'angle.

*Prop : Les Bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I qui est le centre du **cercle inscrit** dans ce triangle.*

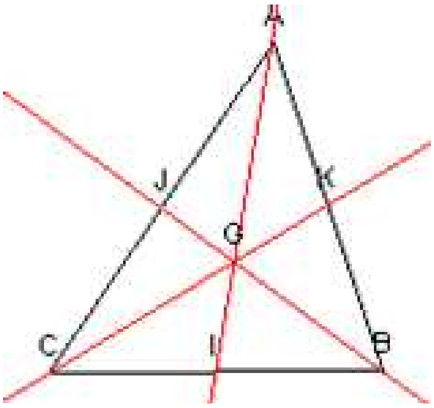
c) Hauteurs



Déf : La hauteur d'un triangle part d'un sommet et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

*Prop : Les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en H appelé **orthocentre** du triangle.*

d) Médianes



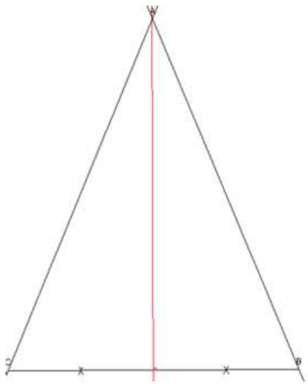
Déf :Une médiane est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé à ce sommet en son milieu.

Prop :Les 3 médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé ***centre de gravité*** *du triangle ou* ***isobarycentre*** *du triangle. Il s'agit du « point d'équilibre » du triangle.*

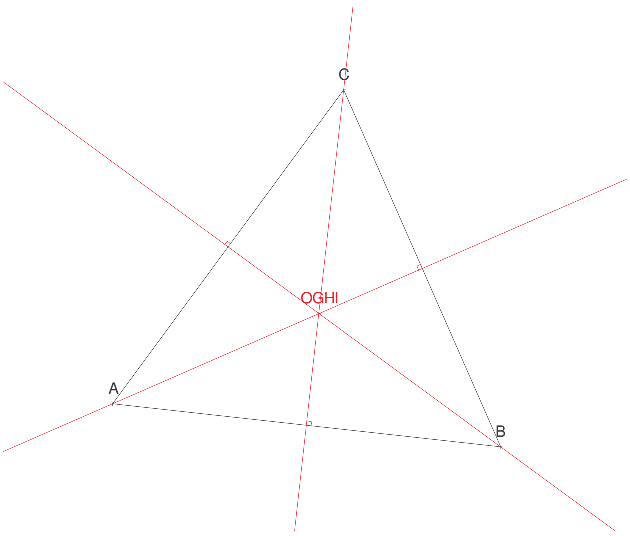
On remarque également que dans tout triangle,

$$\frac{AG}{AI} = \frac{BG}{BJ} = \frac{CG}{CK} = \frac{2}{3}$$

2. Triangles isocèles ou équilatéraux



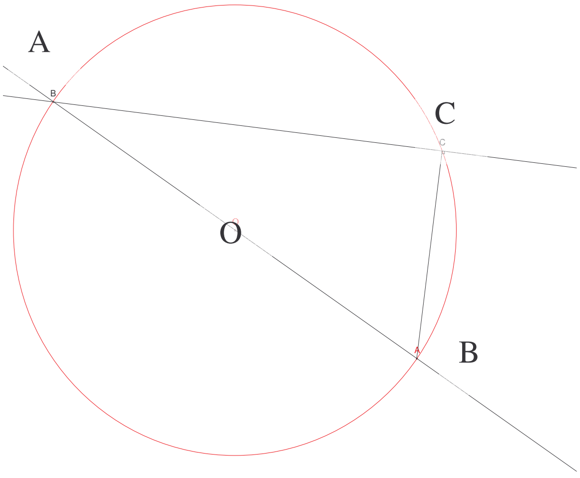
Th *:Dans un triangle isocèle, les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices issues du sommet principal sont confondues. O,G,H et I sont alignés.*



Th : *Dans un triangle équilatéral, toutes les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices sont confondues. O,G,H et I le sont donc également.*

3. Triangles rectangles

a) Cercle circonscrit.



Th : *Dans un triangle rectangle, le cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse.*

Th : *Si on joint l'extrémité d'un diamètre d'un cercle à un point de ce cercle alors on obtient un triangle rectangle.*

Conséquence : $OC = \frac{1}{2}AB$ car OC,OA et OB sont les rayons du cercle circonscrit de ABC.

b) Pythagore

Il y a 3 écritures du théorème de Pythagore, il conviendra d'utiliser la bonne selon les circonstances. La contraposée est toujours le théorème de Pythagore. On y remarque « simplement « que l'absence de conséquence (conclusion fausse) entraîne l'absence de la cause (Hypothèse fausse).

Théorème : ***Si*** *ABC est rectangle en A* ***alors*** $BC^2=AB^2+AC^2$
« Contraposée » : ***Si*** $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ ***alors*** *ABC* ***n'****est* ***pas*** *rectangle en A*
Réciproque : ***Si*** $BC^2=AB^2+AC^2$ ***alors*** *ABC est rectangle en A*

Rem : *Pour le calcul de longueur seul le théorème convient.*

Pour prouver qu'un triangle est rectangle ou non il y a un choix entre contraposée(c'est toujours le Théorème de Pythagore) et réciproque. On ne peut donc pas donner le théorème à utiliser au début de la démonstration mais seulement à la fin .

Pour prouver qu'un triangle est rectangle ou non, il faut tout de suite repérer le plus grand côté pour éviter d'avoir à démonter qu'il n'est rectangle en aucun des 3 sommets. En effet seul ce côté pourrait être l'hypoténuse.

Ex : *AB=3cm AC=4cm et BC=7cm. ABC est-il rectangle ?*
Le plus grand côté est BC donc si le triangle est rectangle, c'est en A.
$BC^2=7^2=49$
$AB^2+AC^2=3^2+4^2=25$
$BC^2 \neq AB^2+AC^2$ *donc d'après « la contraposée du » théorème de Pythagore ABC n'est pas rectangle*

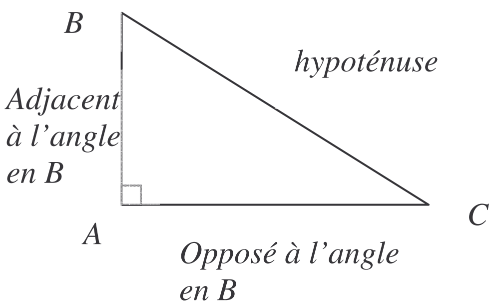
c) Trigonométrie

Si ABC est un triangle rectangle en A alors :

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{Côté adjacent à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$Sin\hat{B} = \frac{\text{Côté opposé à } \hat{B}}{\text{hypoténuse}}$$

$$Tan\hat{B} = \frac{\text{Côté opposé à } \hat{B}}{\text{Côté adjacent à } \hat{B}}$$



Si x est la mesure d'un angle aigu (<90°) alors

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

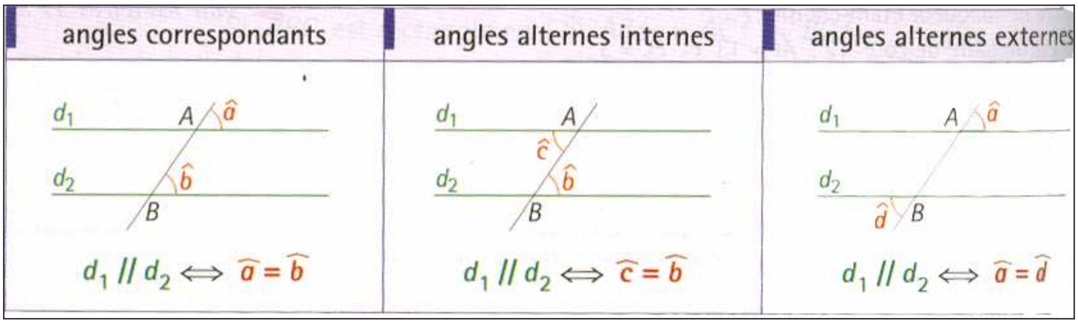
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

On utilisera les valeurs remarquables ci-dessous (la calculatrice ne donnera que des valeurs approchées)

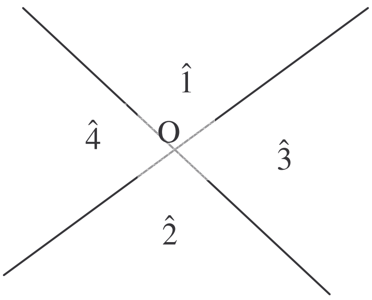
x en degré	*30*	*45*	*60*
Cosx	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sinx	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tanx	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

III. Angles.

4. Avec deux parallèles et une sécante

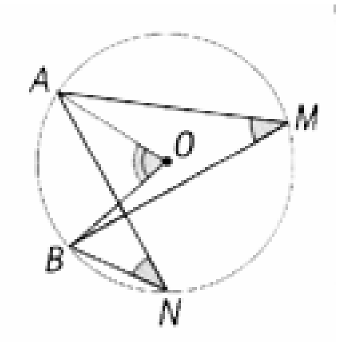


5. Angles opposés par le sommet



Prop : Soit 2 droites sont sécantes en O qui forment 4 angles comme sur la figure ci-contre. Alors les angles $\hat{1}$ et $\hat{2}$ sont égaux et appelés angles opposés par le sommet. Il en va de même pour les angles $\hat{3}$ et $\hat{4}$.

6. Avec un cercle



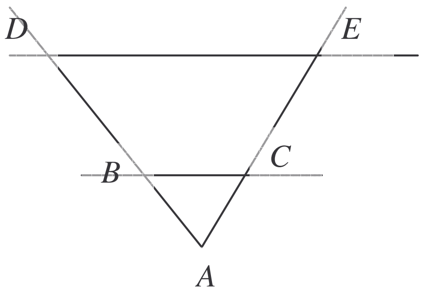
Prop : *Tout angle* $\widehat{AMB}$ *inscrit sur un cercle et interceptant un arc* $\overset{\frown}{AB}$ *mesure la moitié de l'angle au centre* $\widehat{AOB}$ *interceptant le même arc.*

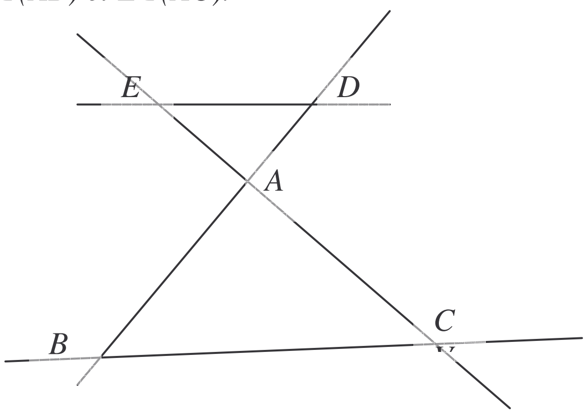
Conséquence : *Deux angles inscrits sur le même cercle et interceptant le même arc sont égaux. (Ici* $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ *)*

IV. Thalès.

1. La configuration type.

On a deux droites qui coupent deux sécantes : D∈(AB) et E∈(AC).





2. Le Théorème

Théorème de Thalès *: Soit A,B,D alignés et A ,C,E alignés .Si (DE)//(BC) alors* $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

3. La contraposée du théorème

Contraposée :On reste dans la même configuration qu'au 1.Si deux des trois rapports ne sont pas égaux alors les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

Encore une fois (cf Pythagore) ceci est toujours le Théorème de Thalès : Dans ce dernier, si la conséquence (conclusion) n'est pas vérifiée, c'est que la cause (Hypothèse) ne l'était pas non plus.

4. La réciproque

Réciproque : Soit A,B et D alignés dans cet ordre et A,C et E alignés dans cet ordre. Si $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ *alors (DE)//(BC)*

5. En pratique

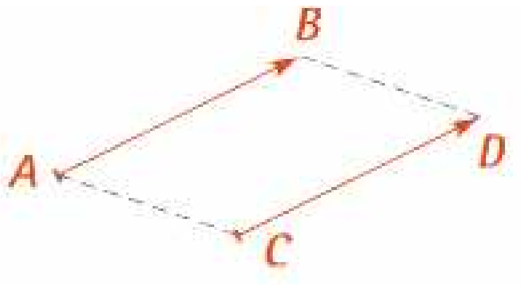
Comme on l'a vu pour le théorème de Pythagore, si le théorème ne pose aucun problème (On cite les hypothèse , on dit qu'on utilise le Th. De Thalès, on applique.) le sens contraire mérite attention ! Lorsque la question est « Les droites truc et muche sont-elles parallèles ? », on ignore au départ si on utilisera contraposée ou réciproque.

Aussi, on calcule les rapports **séparément** puis, si les rapports sont égaux en en déduit que les droites sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès ou , si les rapports ne sont pas égaux en en déduit que les droites ne sont pas parallèles d'après le théorème de Thalès (On peut préciser qu'il s'agit alors de sa contraposée) .

V. Vectoriel

1. Définition.

Déf : *Un vecteur* $\vec{u}$ *est caractérisé par sa direction (c'est la parallèle que le porte), son sens (il y en a deux possibles sur une direction) et sa norme, notée* $\|\vec{u}\|$ *(sa « longueur »).*



2. Egalité de deux vecteurs

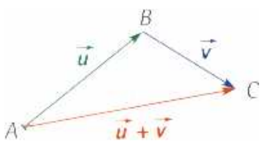
Déf :Deux vecteurs sont égaux si et seulement leurs trois caractéristiques sont les mêmes.

Prop : Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont égaux si et seulement si AB**D**C est un parallélogramme.*

3. Somme de deux vecteurs.

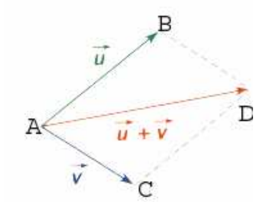
Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan. Pour les ajouter, il y a deux méthodes :*

Relation de Chasles :



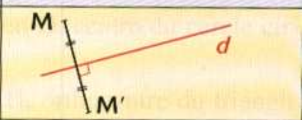
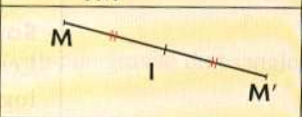
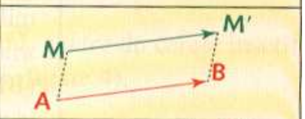
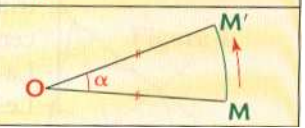
Soit A,B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ *alors* $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Règle du parallélogramme :



Soit A,B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *alors* $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ *où D est tel que ABDC est un parallélogramme.*

VI. Transformations du plan

Transformation	Image M′ de M	Représentation
Symétrie orthogonale par rapport à d	• Si $M \in d$, alors $M' = M$. • Si $M \notin d$, alors d est la médiatrice de [MM′].	
Symétrie centrale de centre I	• Si $M = I$, alors $M' = I$. • Si $M \neq I$, alors I est le milieu de [MM′].	
Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ ou MABM′ est un parallélogramme.	
Rotation de centre O et d'angle α dans le sens de la flèche	• Si $M = O$, alors $M' = O$. • Si $M \neq O$, alors : $OM' = OM$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.	

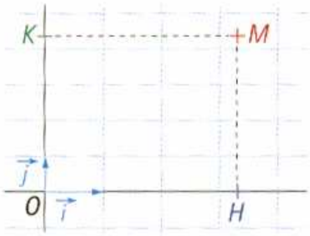
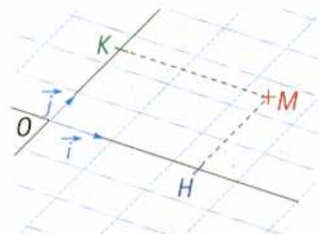
VII. Repérage du plan.

1. Qu'est-ce qu'un repère ?

La donnée d'un Point O et de deux vecteurs unitaires non colinéaires définie un repère du plan (O ; $\vec{i}, \vec{j}$). O est appelé origine du repère.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels (x ;y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit alors que les coordonnées de M dans (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) sont (x ;y) où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

*Rem : Si les deux vecteurs unitaires sont perpendiculaires alors le repère est **orthogonal**. Si en plus ils ont la même norme, le repère est **orthonormé.***

repère orthogonal	repère quelconque
la maille est rectangulaire	la maille est en parallélogramme
OHMK est un rectangle 	*OHMK* est un parallélogramme 

Ici, M(x ;y) avec OH=x et OK=y .

2. Coordonnée d'un milieu

Prop : Dans un repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$), soit A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B). Les coordonnées du milieu de [AB] sont

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

3. Distance

*Prop : Dans un repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) **orthonormé**, soit A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B). On a alors*

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

4. Coordonnées d'un vecteur

Prop : *Dans un repère* $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}\ )$, *soit* $A(x_A\ ;y_A)$ *et* $B(x_B\ ;y_B)$ *alors* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ *et on note :* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Conséquence : *Dans un repère* $(O\ ;\vec{i}, \vec{j}\ )$ ***orthonormé,*** *Si* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *(c'est à dire* $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ *) alors* $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Rem : *Contrairement aux coordonnées d'un point, les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas de la position de l'origine O du repère. Elles sont déterminées par le « décalage » horizontale et verticale entre « le départ » et la « fin » du vecteur.*

VIII. Aire et volume.