Numérique et littéral au collège.

I. Calculs numériques

1. Fractions

- On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou divisant numérateur (en haut) et dénominateur (en bas) par le même nombre.

  Ex : $\frac{2}{3} = \frac{20}{30} = \frac{10}{15} = \ldots$
- Pour simplifier une fraction on utilise la première règle et la décomposition en facteurs premiers (ou les PGCD).

  Ex : $\frac{2184}{130} = \frac{2\times2\times2\times3\times7\times13}{2\times5\times13} = \frac{2\times2\times3\times7}{5} = \frac{84}{5}$

- Pour ajouter (ou soustraire) 2 fractions, on les met au même dénominateur en utilisant la règle du dessus puis on ajoute (ou soustrait) les numérateurs.

  Ex : $\frac{4}{7} + \frac{3}{2} = \frac{8}{14} + \frac{21}{14} = \frac{8+21}{14} = \frac{29}{14}$

- Pour multiplier 2 fractions, on multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble. Cependant, Il faut immédiatement simplifier, si c'est possible.

  Ex : $\frac{4}{5} \times \frac{11}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{2\times2\times11\times5}{5\times3\times2} = \frac{2\times11}{3} = \frac{22}{3}$

- Diviser par une fraction c'est multiplier par son inverse.

  Ex : $\frac{3}{9} \div \frac{11}{4} = \frac{3}{9} \times \frac{4}{11}$

3. Puissances

- Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^{+*}$: $a^n=a\times a\times\ldots\times a$ où a apparaît n fois et $a^0=1$ (si $a\neq0$ car 0^0 n'existe pas)

  Ex : $2^4=2\times2\times2\times2$

  $7^3=7\times7\times7$

- Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}$: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

- Il y a 5 règles fondamentales de calcul :

  Soit a,b,n et m des entiers naturels,

  $a^n\times b^n=(ab)^n$ et $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

  $a^n\times a^m=a^{n+m}$ et, si $a\neq0$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

  $(a^n)^m=a^{n\times m}$

Ex : $\dfrac{7^3\times3^3}{21^2\times21^{-4}}=\dfrac{(7\times3)^3}{21^{2+-4}}=\dfrac{21^3}{21^{-2}}=21^{3--2}=21^5$

- Notation scientifique :

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme: *»Un chiffre non nul***,***un nbre »*$\times10^n$ où n est un entier relatif .

Ex : 312,5425=3,125425 $\times10^2$ *Multiplier par 10^2 revient à décaler la virgule de 2 rangs à droite.1*
0,00125=1,25$\times10^{-3}$ *Multiplier par 10^{-3} revient à décaler la virgule de 3 rangs à gauche.*

4. Radicaux

- Soit a un nombre positif. La ***racine carrée de a***, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré vaut a.
- Un nombre négatif n'a pas de racine carrée. Ainsi une expression du type $\sqrt{x-2}$ n'a de sens que si x≥2.
- 2 uniques règles fondamentales :
-

Soit a et b deux réels positifs : $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention !! $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

- On utilise ces règles pour simplifier une racine.

Ex : $\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

- On les utilise également pour ajouter des racines apparemment différentes.
Ex : $\sqrt{75}+4\sqrt{3}=5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

- Attention à un piège fréquent : $\sqrt{a^2}=?$ (la réponse est a si a≥0 et –a si a≤0) mais $\sqrt{a}^2=a$ car dans ce cas a ne peut être que positif.

5. Vers le calcul littéral

Pour remplacer dans une expression une lettre par une valeur numérique, On remplace partout cette lettre par cette valeur **entre parenthèse.**
Ex : Calculer A=x²+2x pour x=$\sqrt{2}+1$
A=($\sqrt{2}+1)^2+2\times(\sqrt{2}+1)=\ldots$

II. *Calculs littéraux*

1. Factoriser

- On repère des « groupes » de multiplications séparés de + ou –.
- Dans chacun de ces groupes on fait apparaître un ***facteur commun*** à tous.
- On compte combien de fois apparaît ce facteur commun.
Ex : A=**(4x-2)**(2x+3)-**(4x-2)**6+(3-2x)**(4x-2)**
=(4x-2)((2x+3)-6+(3-2x))

- Attention : Dans le cas où le facteur commun est seul, il ne faut pas oublier qu'il est en fait multiplier par 1

$\underline{\text{Ex}}$: A =2x+3-(4x+1)(2x+3)
=**1**(2x+3) –(4x+1)(2x+3)
= (2x+3)(**1** – (4x+1))

2. Simplifier

- Lorsqu'on multiplie plusieurs caractères différents le signe « × » peut être sous-entendu. On classera plutôt les nombres en premier suivi des lettres. On utilise les puissances pour condenser les écritures.

Ex : $a\times b\times 2\times c\times 3\times a\times b\times a=2\times 3\times a\times a\times a\times b\times b\times c=6a^3b^2c$

- On ne peut ajouter ou soustraire que des groupes de lettres strictement identiques. En fait, on factorise.
Ex : 4abce+6abce-2abc-2abce=(4+6-2)abce –2abc=8abce-2abc

3. Développer

- Le développement est l'opération inverse de la factorisation. On doit *distribuer* un facteur commun sur plusieurs « valeurs ». On factorisant la 2ème ligne, on retombe sur la première.

Ex : A=**7x**(2x-7+3-4)
=**7x**×2x+**7x**×-7+**7x**×3+**7x**×-4

- Si le facteur que l'on distribue (=développe) est lui-même une parenthèse, on peut recommencer le même procédé.
Ex : A=(7x+2)(3x-4)
=(7x+2)3x+(7x+2)×-4 *Rem : Avec l'habitude, on peut se passer de cette ligne intermédiaire.*
=7x×3x+2×3x + 7x×-4+2×-4

- Dans le cas d'un signe »-« devant une parenthèse, on distribue le signe – à chaque partie de cette parenthèse qui devient alors son opposée. Seul le signe « –» a une influence, distribuer un signe « + » ne change rien.
Ex : $4-(2x-8x^2+7)=4-2x+8x^2-7$

4. Identités remarquables.

Pour tous a et b , $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

- Ces 3 identités servent à la fois à développer plus vite et à «décoincer » des factorisations où le facteur commun n'est pas apparent.

Ex No1 : $A=4x^2+64-32x+(2x-8)(3x-2)$
$=(2x-8)^2+(2x-8)(3x-2)$ *et le facteur commun apparaît.*

Ex No2 : $A=(2x-4)^2-(3+2x)^2$ *On pose (2x-4)=a et (3+2x)=b*
$=((2x-4)+(3+2x))\times((2x-4)-(3+2x))$ *On reconnaît (a+b)×(a-b)*

2. Cas classiques de factorisations

Si on vous demande de factoriser et qu'il n'y a pas de facteur commun apparent, il y a 3 cas possibles :

- Il faut légèrement modifier une parenthèse pour faire apparaître le facteur commun
  Ex : (3a-2)(2a+3)-(6a-4)(7a-8)
  = (3a-2)(2a+3)-2(3a-2)(7a-8)

- Il y a une identité remarquable sous la forme développée qu'il faut factoriser pour faire apparaître le facteur commun.
  Ex : $(2x+3)(4x-7)+4x^2-9$
  $=(2x+3)(4x-7)+(2x-3)(2x+3)$

- L'expression est de la forme A^2-B^2, on factorise de la façon (A-B)(A+B)
  Ex : $(2x-8)^2-(3x+2)^2$
  $=[(2x-8)-(3x+2)]\times[(2x-8)+ (3x+2)]$

III. Equations

1. Equations du premier degré à une inconnue

- La règle : On ne change rien à une équation en effectuant la même opération dans chaque membre de l'égalité.

- La technique : Effectuer une suite d'opérations permettant d'isoler les inconnues dans un membre et le reste dans l'autre.

  Ex : (1-2x)6+4x=12x-8

6-12x+4x=12x-8	On a développé.
6-8x=12x-8	On a simplifié.
6-8x-12x=-8	On a effectué –12x dans chaque membre.
6-20x=-8	On a simplifié.
-20x=-8-6	On a effectué –6 dans chaque membre.
-20x=-14	On a simplifié.
$x=\frac{-14}{-20}=\frac{7}{10}$	On a divisé par –20 dans chaque membre puis simplifier

- Il y a 2 cas particuliers lorsqu'il ne reste aucun x.
  a) On tombe sur 0x=0 . Dans ce cas n'importe quelle valeur est solution : $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.
  b) On tombe sur $0x\neq0$. Dans ce cas il n'y a aucune solution : $\mathcal{S}=\varnothing$.

2. Equation produit

Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteur au moins est nul.

Ex : (2x-3)(4x+2)(-5x+10)=0

2x-3=0	ou	4x+2=0	ou	-5x+10=0
$x=\frac{3}{2}$	ou	$x=-\frac{1}{2}$	ou	x=2

Les solutions sont $\frac{3}{2},-\frac{1}{2}et2$

3. Cas $X^2=A^2$

Méthode : faire passer A^2 dans l'autre membre et factoriser. On se rapporte alors au 2.

Ex : $(2x-3)^2=64$

$(2x-3)^2-8^2=0$

$[2x-3-8]\,[2x-3+8]=0$ et retour au 2.

4. Encore des carrés

Si un développement fait apparaître des puissances de x, il faut factoriser pour revenir au cas du 2.

Ex : $(2x-3)(4x+2)-(4x+2)\times 3=0$

$(4x+2)\,[2x-3-3]=0$ et retour au 2.

IV. *Inéquations*

- On peut ajouter ou soustraire la même chose aux deux membres de l'inégalité sans en changer le sens
- On peut multiplier ou diviser les deux membres de l'inégalité par un même nombre POSITIF sans en changer le sens.
- On peut multiplier ou diviser les deux membres de l'inégalité par un même nombre NEGATIF mais dans ce cas le sens de l'inégalité est inversé.

Ex : $2x-4<6x+3$: on fait -6x de chaque côté : ça ne change rien

$-4x-4<3$: on fait +4 de chaque côté : ça ne change rien

$-4x<7$: on fait ÷-4 de chaque côté : l'ordre s'inverse

$x>\frac{7}{-4}$

- On peut représenter la solution graphiquement : On met en rouge la partie solution .