Suites

Ex : arithmétique

Une suite arithmétique $(U_n)_{n\geq 0}$ est définie par son premier terme U_0 et $U_{n+1}=U_n+r$ où r est un réel fixé.

1. Si $U_0=-2$ et $r=5$, calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.
2. Trouver une relation entre U_n, r et U_0.
3. Dans le cas du 1. Calculer U_{1000}.
4. Trouver une relation entre U_n , U_m et r lorsque n et m sont deux entiers naturels tels que $m>n$.
5. Soit une suite arithmétique avec $U_{20}=10$ et $U_{31}=24$. Déterminer r et U_1

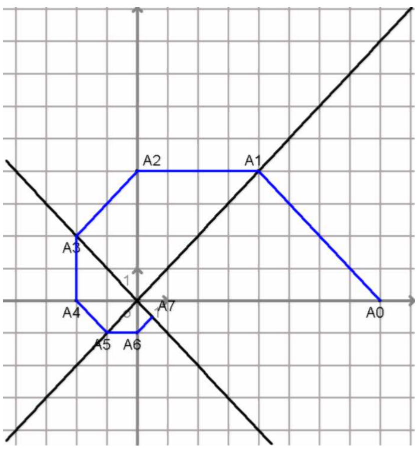
Ex : poursuite.

Un parachutiste saute d'un avion à 2000m d'altitude. Sa vitesse initiale est $v_0=0$ m/s. Chaque seconde, cette dernière augmente de 9,8m/s. On note v_n la vitesse du parachutiste à la seconde n.

1. Quelle sera la vitesse en km/h du parachutiste au bout de 5s de chute libre ?
2. Quelle distance aura-t-il alors parcourue ?
3. Le parachute s'ouvrira lorsque le parachutiste passera sous les 500m. Au bout de combien de secondes cela arrivera-t-il ?

Ex : On pose $l_n=A_nA_{n+1}$ pour tout $n\geq 0$.

1. Démontrez que la suite $(l_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique que vous préciserez
2. Déterminez la longueur d'une spirale qui se termine en A_{10}.



Ex : De la suite dans les idées.

Dans une banque, depuis 250 ans, une somme déposée sur un compte augment de 4% chaque année.
Mon arrière-arrière-arrière-arrière grand père y a oublié une somme équivalente à 12€ en 1794.

1. On pose $U_0=12$€ et U_n la somme sur le compte en l'an 1794+n. De quelle type de suite s'agit-il ? Justifiez.
2. De quelle somme Antoine dispose-t-il aujourd'hui en 2004? Justifiez.

Ex :

Soit $U_n=\left(6+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\frac{n^2+1}{2n^2+n+8}$ pour tout n>0. Démontrez que cette suite est convergente et précisez la limite.

Ex : suite et second degré

Soit f(x)= $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$.

Partie I

1. Résoudre f(x)=0.
2. Factoriser f(x) au maximum
3. Montrer que f(x+1)-f(x)=x

Partie II

On pose U_n=f(n+1). Pour n≥1.

1. CalculerU_1,U_2,U_3.
2. Montrer que $U_n=U_{n-1}+n$ pour n>0.
3. Montrer que U_n=1+2+3+4+5+…+n.
4. En déduire que 1+2+3+….+n= $\frac{1}{2}n(n+1)$
5. En déduire 1+2+3+…..+1000

Ex : suite et troisième degré

Soit f(x)= $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$.

1. Résoudre f(x)=0.
2. Montrer que f(x)= $\frac{1}{6}x(2x-1)(x-1)$
3. Montrer que f(x+1)-f(x)=x^2.
4. Soit $(U_n)_{n>0}$, la suite définie par U_n=f(n+1). Montrer que $U_n=U_{n-1}+n^2$ si n>1 et que U_1=1
5. Calculer U_2,U_3 et U_4 à partie de U_1.
6. En déduire que $U_n=1^2+2^2+3^2+…+n^2$. Expliquer.
7. En déduire que $1+2^2+3^2+…+n^2$=f(n+1)= $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
8. En utilisant 6. calculer $1+2^2+3^2+…+10^2$.

Ex : suite et nombre d'or

Considérons la suite définie par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \end{cases}$.

1. Déterminer la fonction associée à la suite et son domaine de définition.
2. Démontrer par récurrence que la suite est bien définie.
3. Construire graphiquement U_1,U_2 et U_3. Expliquer.
4. Donner un programme pour calculer les termes de la suite à la calculatrice.

5. Grâce au programme, déterminer U_{100} et le comparer au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ex : Suite

Considérons la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ telle que $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \end{cases}$

1. Déterminez la fonction associée à cette suite et son domaine de définition.
2. Représentez graphiquement les 3 premiers termes de $(U_n)_{n\geq 0}$.
3. Démontrez par récurrence que, pour tout n>0, $U_n>3$.
4. Démontrez que, pour tout n>0, $U_{n+1} - U_n = \frac{(3-U_n)(U_n+1)}{\sqrt{2U_n+3}+U_n}$.
5. En déduire que $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
6. En déduire que $(U_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
7. En utilisant la calculatrice, déterminez U_{25}.

Ex : polygônes et π

Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. Il est composé de n triangles isocèles en O tous identiques. Les angles sont calculés en radian.

Partie I

1. Quel est l'angle au sommet de chaque triangle isocèle ?
2. Faire un dessin dans le cas où n=3, n=4 et n=6.
3. On se place dans un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut α. Déterminer la longueur de sa base lorsque les côtés égaux de ce triangle mesurent 1 (Pensez à tracer la hauteur)
4. En déduire la longueur de la base d'un des triangles isocèles d'un polygone régulier à n côtés.
5. Monter que le périmètre de ce polygone est $2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Partie II

1. On définie la suite $(Un)_{n\geq 1}$, par $U_n= n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Calculer $U_1, U_{10}, U_{100}, U_{1000}, U_{10000}$

2. De quelle valeur particulière U_n semble-t-elle se rapprochée ? Donner un explication géométrique.

Ex : géométrique

Un arbuste est placé dans un pot de 25cm de haut et mesure 1m lors de son achat. Il croît de 8% par an. On appelle h_n la hauteur totale de l'arbuste n année(s) après l'achat.

1. (h_n) est-elle géométrique ? Justifier. Déterminer q et h_0.
2. Donner l'expression de h_n en fonction de n. Justifier.
3. Quand l'arbuste aura-t-il doublé sa taille de départ ?
4. Quand l'arbuste atteindra-t-il le plafond à 2,70m dur sol ?

Ex :

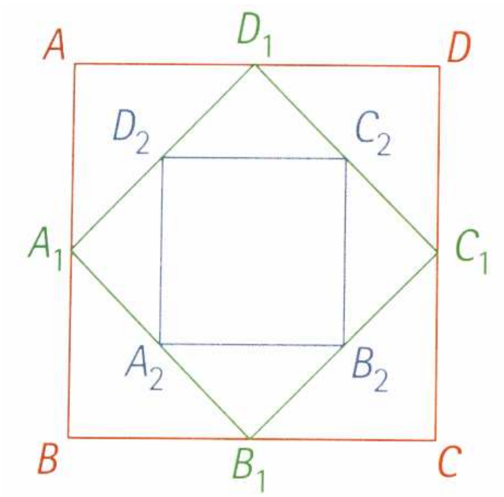
Une cuve est un parallélépipède rectangle à base carrée de 50cm de côté et contient déjà 75 l d'eau. On veut compléter le remplissage à l'aide d'un robinet dont le débit est de 50 l/min. h_n désigne la hauteur d'eau dans la cuve après n minute(s) de remplissage.

1. Quelle est la nature de (h_n) ? Justifier. Déterminer h_0 et r.
2. Quelle est la hauteur d'eau dans la cuve après 8 minutes de remplissage ?

Ex : Déterminer la nature et le sens de variation des suites suivantes. Représentez les graphiquement.

1. $U_{n+1}=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
2. $U_{n+1}= U_n\times 2$ avec $U_0=-1$
3. $U_{n+1}=2n-5$
4. $U_n=2\times\left(\frac{-3}{2}\right)^{n}$

Ex : suite de carrés

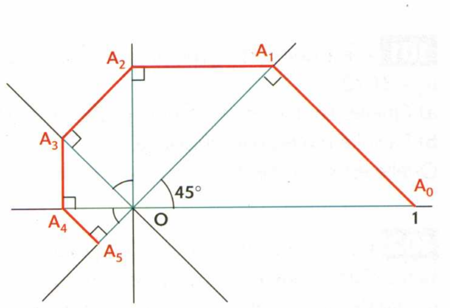


On construit une suite de « carrés emboîtés » à partir des milieux du carré précédent. Le carré initial à pour côté 10 cm.

1. On appelle l_n le périmètre du carré $A_nB_nC_nD_n$, l_0 étant celui de ABCD. Quelle est la nature de $(l_n)_{n\geq 0}$? déterminer sa raison et son premier terme. Justifier.
2. Même question pour le suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la suite des aires de ces mêmes carrés.
3. Quel carré a un périmètre au moins dix fois inférieur à celui du premier ? Justifier.
4. Quel carré a une aire au moins 7 fois plus petite que celle du premier ? Justifier.

Ex 4 : Escargot ?.

Dans la figure ci-contre $(U_n)_{n\geq 0}$ est la suite des distances OA_n.
On donne $U_0=OA_0=1$.
Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.



Ex : suite et graphique.

Soit f(x)= $\sqrt{3x+2}$

1. Déterminer Df.
2. Soit $(U_n)n>0$ tel que $U_0=0$ et $U_{n+1}=f(U_n)$. Cette est-elle toujours définie ? Expliquer.
3. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f (faire un tableau de valeurs).
4. Tracer la représentation graphique des 4 premiers termes de la suite.
5. Graphiquement, lire vers quelle valeur semble tendre (U_n)
6. Déterminer cette valeur par le calcul.

Ex :

Les questions ci-dessous sont indépendantes. On note $S_n=U_0+U_1+....+U_n$

1) (U_n) une suite arithmétique définie par $U_1=2$ et $r=-4$. Calculer U_{10} et S_{10}.
2) (U_n) une suite arithmétique définie par $U_{10}=15$ et $U_{17}=36$. Calculer r et U_0.
3) (U_n) une suite géométrique définie par $U_2=6$ et $q=2$. Déterminer U_0 et S_{11}.
4) Déterminer les raisons des suites géométriques de premier terme U_0 telles que $U_5=16$ et $U_3=49$.
5) Soit (U_n) une suite telle que $U_0=\frac{1}{4}$; $U_1=2$ et $U_2=16$.
   a) Cette suite est-elle arithmétique ? Pourquoi ?
   b) Cette suite peut-elle être géométrique ? Si oui quelle serait sa raison ?
   c) Cette suite est-elle a coup sur géométrique ? Pourquoi ?