Produit scalaire

Ex : angles

Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ;2), B(4 ;2+$\sqrt{3}$) et C (2 ;2-$\sqrt{3}$).
Déterminez tous les angles géométriques de ABC.

Ex :orthogonalité

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC). Soit A' le milieu de [BC].

1. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Justifier.
2. Puisque $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AJ}$, démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$.
3. Puisque $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ}$, démontrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HA}$.
4. En utilisant 1.,2. et 3. , Démontrer que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.
5. En déduire les positions relatives de (IJ) et (AA').

Ex : avec des barycentres

ABC est un triangle équilatéral de côté a. I est le barycentre de {(A ;1),(B ;4)} et J le barycentre de {(A ;3),(C ;2)}.

1. Déterminer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que (IJ) et (AC) sont orthogonales.

Ex :

[AB] est un diamètre d'un cercle Γ de centre O et de rayon 3cm. Soit C∈Γ tel que AC=2. H est le pied de la hauteur issue de C dans ABC. La tangente à Γ en C coupe (AB) en K.

1. En calculant de deux façons différentes $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, démontrer que AH=$\frac{2}{3}$. En déduire OH.
2. En calculant $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$ de 2 façons différentes, déterminer la mesure de $B\hat{O}C$ à0,1 près.

Ex :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit A(2;2) et B(6 ;0).

1. Déterminez une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA]. Justifiez.
2. Soit (d) la tangente à $\mathcal{C}$ en A. Déterminez son équation. Justifiez.
3. Déterminez les mesures des angles de AOB. Justifiez.

Ex : Al-Kashi et les angles

Soit ABC un triangle isocèle tel que $B\hat{A}C = \frac{5\pi}{6}$ et BA=BC=1.

1. Démontrer que BC=$\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
2. a. Déterminer $A\hat{B}C$.

   b. Exprimer cos $A\hat{B}C$ en fonction de AB, BC et AC.

   c. En déduire que cos$\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
3. a. Montrer que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

   b. Calculer $\cos(2\times\frac{\pi}{12})$ sans utiliser $\frac{\pi}{6}$ pour vérifier nos

calculs

Rappel :

Cos(a+b)=cosacosb-sinasinb
Cos(a-b)=cosacosb+sinasinb
Sin(a+b)=sinacosb+cosasinb
Sin(a-b)=sinacosb-cosasinb
Cos(2a)=cos²a-sin²a
Sin(2a)=2cosasina
Cos²a+sin²a=1
Al-Kashi : a²=b²+c²-2bccos$\hat{A}$.
Aire=$\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$