Polynômes

Ex : résoudre sur R sans utiliser Δ.

1. $(4a-2)^2-(7-3a)^2=0$
2. $16a^2+49-56a-(4a-7)(2a+1)=0$
3. $(8x-3)^2-25x^2-16-40x=0$
4. $49x^2-64-(8x+3)(7x-8)+7x-8=0$
5. $4x^2+9-12x-(7x-3)(2x-3)=0$

Ex : résoudre sur R grâce à Δ.

a) $2x^2-6+4x=0$
b) $2x^2-16x+32=0$
c) $-x^2+8x-16=2$
d) $3x^2+2x-6=0$

Ex :

Soit p(x)= x^3-6x^2+3x+a où a est un réel fixé.

1) Déterminez a pour que p soit factorisable par 2.
2) Calculez p(-1).
3) Justifiez le fait que p puisse s 'écrire p(x)=(x-2)(x+1)Q(x).
4) Déterminez Q. Détaillez et expliquez.
5) Résoudre p(x)>0.

Ex :

Soit $p(x)=2x^3-5x^2+ax+3$ où a est un réel fixe.

1. Déterminez a tel que p soit factorisable par (x+1) .
2. Soit q le polynôme tel que p(x)=(x+1)q(x). Quel est le degré de q ? Déterminez q.
3. Etudiez le signe de $(2x^2-7x+3)(x+1)$ sur R.
4. On sait que cette fonction admet deux extremums, un en $\frac{-1}{3}$ et l'autre en 2. Quelles sont les coordonnées des points de la courbe correspondants ?
5. En utilisant les données engrangées dans les questions précédentes, tracez l'allure de la courbe représentative de p dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Expliquez.

Ex :

La trajectoire d'une balle est donnée par $f(x)=-5x^2+10x+15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air exprimé en secondes et f(x) la hauteur en mètres.

1. Déterminez la hauteur maximale de la balle ainsi que le moment où elle l'atteindra.
2. Quand la balle touchera-t-elle le sol ? Justifiez.

Ex :

Soit p(x)=$-x^3+3x^2+x-3$

1. Donner un tableau de valeur raisonnable et tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthogonal.
2. Démontrer que p(x) peut s'écrire sous la forme $(-x+3)(ax^2+bx+c)$ et déterminer a,b et c.
3. Résoudre p(x)=0.
4. Résoudre p(x)<0.
5. Vérifier graphiquement vos résultats. Expliquer et indiquer les constructions.
6. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de -3 par p.
7. a . Sur le même repère, tracer la courbe représentative de g(x)=x-3.
   b. Déterminer graphiquement et par le calculs les solutions de f(x)=g(x).

Ex : mise en équation, second degré

Un champ rectangulaire de longueur x et de largeur y et tel que son périmètre est 46m et son aire132m^2. Déterminer x et y. Détailler les calculs et la méthode

Ex : mise en équation, second degré

I. Déterminer deux nombres entiers consécutifs sachant que la somme de leur carré est 2 813.
II. Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont trois entiers consécutifs.
Quels sont-ils ?
III. Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire de périmètre 140 m et de diagonale 50 m.
IV. Un champ rectangulaire de longueur x et de largeur y et tel que son périmètre est 46m et son aire132m^2. Déterminer x et y. Détailler les calculs et la méthode

Ex : drôle de Δ

Soit le polynôme $P(x)=2x^2-(\sqrt{2}+1)x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Calculer Δ.
2. Calculer $(1-\sqrt{2})^2$.
3. En déduire $\sqrt{\Delta}$ (Attention au signe de $(1-\sqrt{2})$ …)
4. Résoudre p(x)=0.

Ex :

Soit p(x)=$-x^3+6x^2-3x-10$

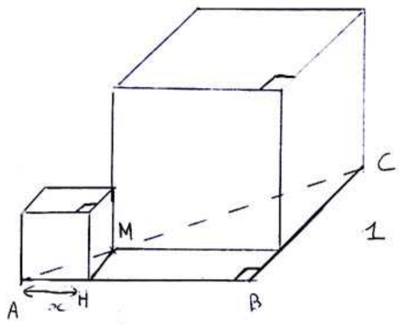
1. Démontrez qu'on peut déterminer a,b et c tels que $p(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ et faites le.
2. Résoudre p(x)<0.

Ex : Petit problème

Déterminez les dimensions d'un rectangle dont le périmètre mesure 140m et une diagonale mesure 50m. Justifiez vos calculs.

Ex : un minimum.

Le but de l'exercice est de déterminer la position de M sur [AC] pour que la somme des volumes des 2 cubes soit minimale. On donne AB=BC=1 et on pose AH=x où $x \in [0\,;1]$. On note V la fonction qui à x fait correspondre la somme des volumes des cubes.



1. Montrez que $V(x)=3x^2-3x+1$. Justifiez
2. Déduisez-en la position de M sur [AC] pour répondre au problème. Justifiez.

Ex : Résoudre sur $]-\pi\,;\pi]$.

a) $2\cos^2(x)+3\cos(x)-2=0$
b) $2\sin^2(x)+3\sin(x)-2=0$

Ex : Résoudre dans R.

c) $2x^2+3x-2=0$.
d) $2\cos^2(x)+3\cos(x)-2=0$. (Utilisez a.)

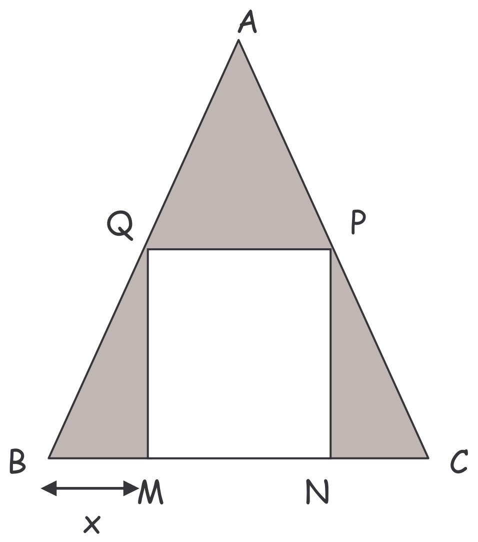
Ex : degré 3.

Soit $p(x)= x^3-6x^2+3x+10$

3. Trouver a,b et c tel que $p(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$
4. Résoudre $p(x)=0$
5. résoudre $p(x)<0$
6. Tracer la courbe de p. Vérifier graphiquement 2 et 3.

Ex : Problème de maximum

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 10cm et un rectangle MNPQ tel que M et N sont sur [BC], P est sur [AC] et Q est sur [AB]. On pose BM=x et on rappelle que tan60°= $\sqrt{3}$.



1. Justifier le fait que NC=x.
2. Où varie x ? Justifier.
3. a. Exprimer MN en fonction de x. Justifier.
   b. Exprimer QM en fonction de x. Justifier.
   c. En déduire que l'aire de MNPQ en fonction de x est A(x)= $-2\sqrt{3}x^2+10\sqrt{3}x$.

3. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de A sur [0;5].

4. Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle l'aire de MNPQ est maximale. Quelle est alors cette aire ?

5. Vérifier les résultats de la question 4 graphiquement.

Ex : Problème de maximum

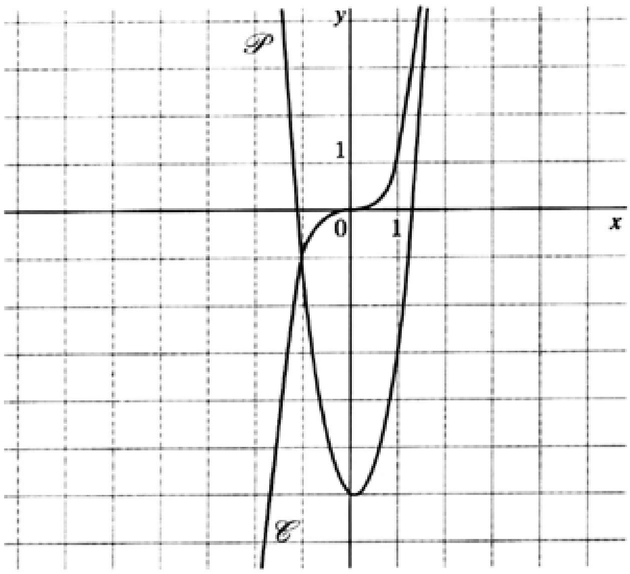
Une entreprise fabrique un type de bibelot. Le coût de production d'une quantité q de bibelots est donné, en euros, par $C(q)=0{,}02q^2+20q+4000$. 4 000 représentent les coûts fixes (dépenses pour l'achat du matériel, l'installation et autres frais), le coefficient 20q représente le prix de la matière première pour un bibelot (alliage, peinture ...) et $0{,}02q^2$ représente les coûts de main d'œuvre, stockage, frais d'approvisionnement en matière...

1. On suppose que toute la production, quelle que soit la quantité, est vendue au prix de 110 € le bibelot. On note R(q) l'argent ramassé après la vente de q bibelots sans tenir compte du coût : c'est la recette.
   Exprimer R(q) en fonction de q .
2. Montrer que le bénéfice net dégager par l'entreprise est alors $B(q)=-0.02q^2+90q-4000$.
3. En utilisant un tableau de valeur, tracer la courbe représentative de B sur [0 ;4500] dans un repère orthogonal en prenant 1cm=500 bibelots vendus en abscisse et 1cm=5000€ en ordonnée. (Méfiez-vous, ça va haut ...)
4. Expliquer à chaque fois votre réponse et faite une construction graphique pour l'appuyer.
   a. Déterminer graphiquement pour quelle(s) quantité(s) q on obtient un bénéfice nul. Expliquer
   b. Déterminer graphiquement pour quelle(s) quantité(s) q on obtient un bénéfice positif. Expliquer
   c. Déterminer graphiquement pour quelle(s) quantité(s) q on obtient un bénéfice maximum. Quel est alors ce bénéfice ?
5. Vérifier 4. par le calcul. Justifier et détailler.

Ex :

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=4x^2-x-6$ et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=x^3$.

Un seul de leurs points d'intersection est visible sur ce graphique.



Déterminer algébriquement les coordonnées des deux autres points d'intersection.

Ex :

Déterminer l'ensemble des réels m pour que les inéquations suivantes soient vérifiées, quel que soit le réel x :

a. $mx^2 + 2(m+1)x + 25m + 12 > 0$;

b. $4(m+3)x^2 - (3m-1)x + (m+1) \geq 0$;

c. $x^2 + 2mx + 1 \geq 0$.

Ex :

1. Déterminer les réels a, b et c pour que la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ coupe :

- l'axe des ordonnées au point A, d'ordonnée 6,
- l'axe des abscisses au point B, d'abscisse 2,
- et la droite d'équation $y = x$ au point P d'abscisse 1.

2. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

3. Calculer les coordonnées du second point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite d'équation $y = x$.

Ex : nombre d'or

On appelle nombre d'or le nombre $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre intervient souvent en algèbre et en géométrie.

1) Calculer φ^2 et $\varphi+1$
2) Calculer $\frac{1}{\varphi}$ et $1-\varphi$
3) Résoudre $x^2-x-1=0$
4) Ecrire les solutions de cette équation en fonction de φ.