Fonctions

-- Opérations sur les fonctions--

Ex : Les questions sont indépendantes.

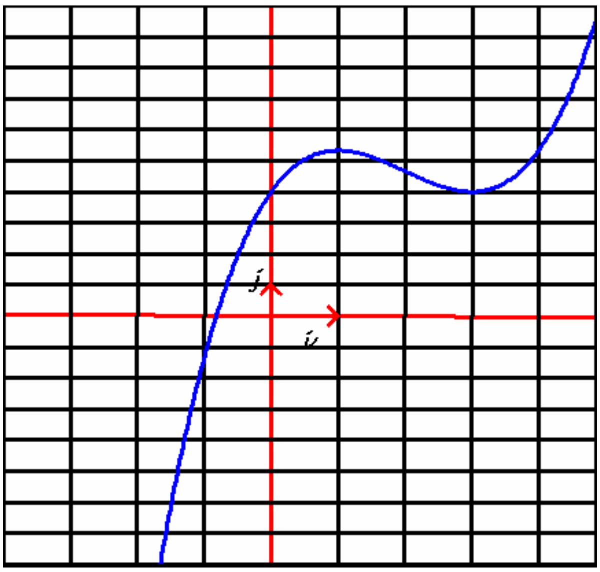
1. Déterminez le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{\dfrac{-6x+3}{(2x-4)(3-x)}}$.
2. Déterminez la parité de $g(x)=\dfrac{4x-x^3}{2\cos(x)}$.
3. Déterminez le sens de variation de $h(x)=(x-1)^2-9$ sur $\Re$.
4. Représentez $h(x)=(x-1)^2-9$ dans un repère orthonormé.

Ex : fonctions de références

A partir des fonctions de référence, tracez les courbes représentatives des fonctions ci-dessous. On utilisera un repère orthonormé par question dans lequel on représentera la fonction de référence utilisée et la courbe représentative de g en indiquant les transformations utilisées.

1. g(x)= $\dfrac{1}{x-2}+1$
2. g(x)=x^2-4x+5.
3. g(x)=cos(x+π).

Ex : Opérations sur les fonctions



Voici la courbe d'une fonction f définie sur [-1,7;
1. Dresser son tableau de variation
2. Donner le tableau de variation des fonctions (3+f) et($\frac{-1}{2}$f)
3. Tracer les fonctions (3+f) et ($\frac{-1}{2}$f) on les déduisant de la courbe de f. Expliquer.
4. Encadrer f lorsque x appartient à]-1 ;3]. Justifier

Ex : Composons.

Soit f(x)=x^2 et g(x)=-2x+1. Déterminez fog et gof ainsi que leurs sens de variation sur R.

Ex : composons.

Soit f(x)=2x²+3x et soit g(x)=2x²-4

Déterminer fog et gof.

Ex : Courbes et translations.

Indiquez comment obtenir les courbes représentatives des fonctions ci-dessous à partir de courbes de références puis tracez les et donnez leurs tableaux de variations.

1. g(x)=x²-4x+5.
2. h(x)= $\sqrt{x+3}-2$.

-- Généralités—

Ex : Domaines de définition

Déterminer le domaine de définition de :

a) f(x)= $\dfrac{x^2-2x+3}{(x^2-4x+5)(-2x+3x^2-1)}$.

b) g(x)= $\sqrt{(2x+3)(-5x^2+3+2x)}$

Ex : intersection

On considère les fonction f(x)= $\dfrac{2}{x}$ et la droite g(x)= $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

1. Donner pour chacune des fonctions leur domaine de définition.
2. Dresser un tableau de valeur sur [-7 ;7].
3. Tracer les courbes représentatives de f et g dans (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) orthonormé.
4. Résoudre graphiquement f(x)=g(x) et f(x)<g(x).
5. Vérifier les résultats de 4. par le calcul.

Ex : graphiques et équations

Soit f(x)= $\dfrac{1}{2x+1}$ et g(x)=2x+1.

1. Déterminer les domaines de définition de f et g.
2. Dresser un tableau de valeur approprié puis tracer les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3. Donnez par lecture graphique le tableau de variation de f sur R.
4. Résoudre graphiquement f(x)=g(x) et f(x)>g(x). Expliquer.

5. Vérifier la question 3. par le calcul.

Ex : Fonctions affines par morceaux

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} -x-4 & si \quad x<-3 \\ x+2 & si \quad -3\leq x\leq 0 \\ -\frac{1}{2}x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

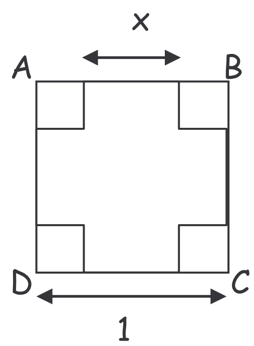
1. Calculer f(-5), f(-3), f(0) et f(4)
2. Construire en justifiant le tableau de variation de f sur R en y indiquant les extremums.
3. Déterminer le ou les antécédents de 1 par f. Justifier.
4. En cadrer f(x) pour
   a. $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$ b. $x\in[-\pi;\pi]$

Ex : Antécédents.

1. Déterminer les antécédents de 0 par f(x)= $\frac{-5}{-x+2}-4x$ sur] 2 ;+oo[
2. Déterminer les antécédents de $\frac{-11}{6}$ par g(x)= $\frac{4x+2}{3}+\frac{3-2x}{6}$ sur R.

-- Problèmes--

Ex : problème d'aire



Dans un carré ABCD de côté 1cm, on veut construire une croix dont l'aire est la moitié de celle du carré. On désigne par x la largeur de chaque bande de la croix comme l'indique le dessin. Déterminer la valeur exacte de x.

Ex : La distance la plus courte …

L'espace est rapporté au repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit A (2 ;3 ;2) et ,dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit (d) la droite d'équation y=x.

1. Expliquez pourquoi pour tout point M de (d), il existe x tel que M(x ;x ;0).
2. Calculer AM² en fonction de x.
3. Dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthogonal, on note f(x)=2x²-10x+17.
   a. Quelle est la nature de la courbe représentative de f ?
   b. Tracez point par point la courbe représentative de f sur [0 ;5].
   c. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole. Vérifier graphiquement.

4. Déduire de 3. les coordonnées de M dans $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ telles que AM^2 soit minimale.
5. Montrer que OAM est rectangle. Qu'en pensez vous ?

Ex :

Soit $p(x)=2x^3-5x^2+ax+3$ où a est un réel fixe.

1. Déterminez a tel que p soit factorisable par (x+1) .
2. Soit q le polynôme tel que p(x)=(x+1)q(x). Quel est le degré de q ? Déterminez q.
3. Etudiez le signe de $(2x^2-7x+3)(x+1)$ sur R.
4. On sait que cette fonction admet deux extremums, un en $\frac{-1}{3}$ et l'autre en 2. Quelles sont les coordonnées des points de la courbe correspondants ?
5. En utilisant les données engrangées dans les questions précédentes, tracez l'allure de la courbe représentative de p dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Expliquez.

Ex :

La trajectoire d'une balle est donnée par $f(x)=-5x^2+10x+15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air exprimé en secondes et f(x) la hauteur en mètres.

1. Déterminez la hauteur maximale de la balle ainsi que le moment où elle l'atteindra.
2. Quand la balle touchera-t-elle le sol ? Justifiez.

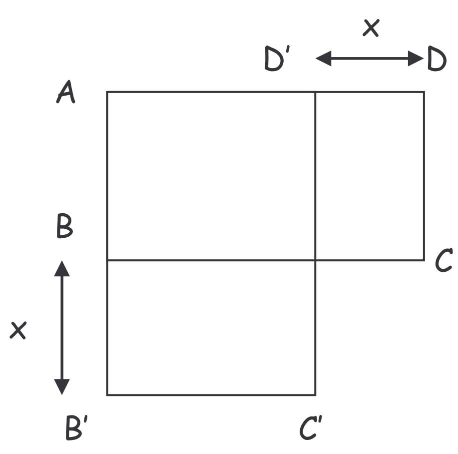
Ex :

Soit $p(x)=-x^3+3x^2+x-3$

1. Donner un tableau de valeur raisonnable et tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthogonal.
2. Démontrer que p(x) peut s'écrire sous la forme $(-x+3)(ax^2+bx+c)$ et déterminer a,b et c.
3. Résoudre p(x)=0.
4. Résoudre p(x)<0.
5. Vérifier graphiquement vos résultats. Expliquer et indiquer les constructions.
6. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de -3 par p.
7. a . Sur le même repère, tracer la courbe représentative de g(x)=x-3.
   b. Déterminer graphiquement et par le calculs les solutions de f(x)=g(x).

Ex : Manque pas d'air

On considère un rectangle ABCD tel que AB=10cm et AD=20cm. On ajoute un longueur BB'=x au côté [AB] et on ôte la même longueur DD'=x au côté [AD]. On obtient ainsi un nouveau rectangle AB'C'D'.



1 a. Où varie x ? Justifier.

b. Déterminer l'aire de AB'C'D' en fonction de x.

2. soit $f(x)=-x^2+10x+200$ avec $x\in[0\;;20]$.

a. Donner le forme canonique de f.

b. Démontrer que f est croissante du [0 ;5] et décroissante sur [5 ;20].

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. En déduire la valeur de x pour que l'aire de AB'C'D' soit maximale.

e. Vérifier graphiquement.

-- Nombres dérivés--

Ex : droites

Construire la droite D passant par le point A de coefficient directeur m dans les cas suivant.

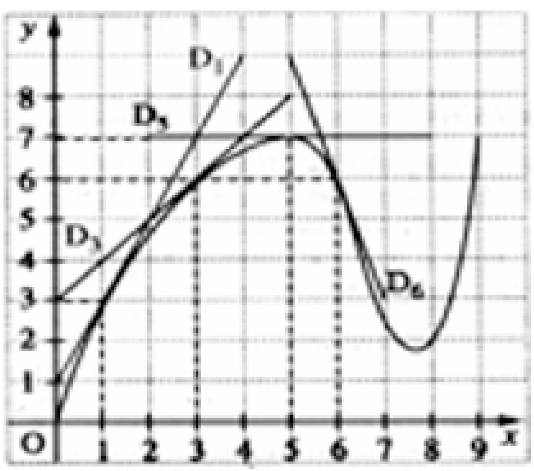
a) A(1 ;3) et m=2,5 b) A(-2 ;1) et m=$\frac{-1}{2}$ c) A(-3 ;-1) et m=$\frac{1}{4}$

Ex : droites

Déterminer le coefficient directeur puis l'équation de la droite D passant par :

a) A(-1 ;3) et B($\frac{-1}{2}$;4) b) A(0,75 ;-0,25) et B(-0,125 ;0,75)

Ex : nbre dérivé



Soit f la fonction définie sur [0 ;9] dont la courbe représentative est donnée avec ses tangentes aux points d'abscisses 1 ;3 ;5 et 6, notées respectivement D_1,D_3,D_5 et D_6.

1. Déterminer f'(1),f'(3),f'(5) et f'(6). Expliquer.
2. On sait que le nombre dérivé de f en 9 est 4. Reproduisez la courbe ci contre et tracer sa tangente en x=9.

Ex : Vers les fonctions dérivées.

Soit $f(x)=x^{3-}3x$. f est définie et dérivable sur R et de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

1. Déterminez son nombre dérivé en x.
2. a. Calculez en utilisant 1. f'(-1), f'(0) et f'(1).
   b. Déterminez les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ en –1, 0 et 1.
   c. Tracez ses 3 tangentes dans $(O;\vec{i},\vec{j})$
3. Déterminez les racines de f.
4. Calculez f(-2) et f(3)
5. Utiliser toutes les questions précédentes pour tracez $\mathcal{C}$

-- Dérivation--

Ex :

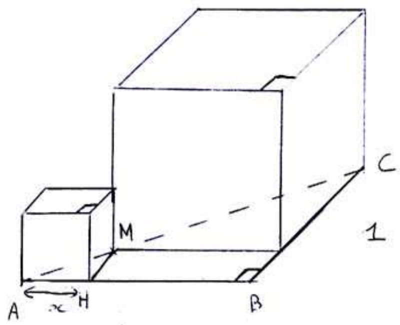
Soit ABCD un carré de côté 10cm. Soit M, N, P et Q respectivement sur [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que AM=BN=CP=DQ=x.

1. Où varie x ?
2. Démontrez que MNPQ est un carré. Déterminez la longueur d'un côté.
3. Déterminez en fonction de x l'aire de MNPQ.
4. Quelle est la valeur de x telle que l'aire de MNPQ soit minimale ?

Ex : un minimum.

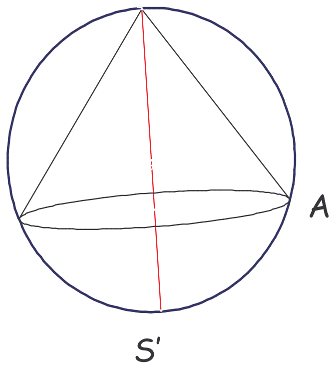
Le but de l'exercice est de déterminer la position de M sur [AC] pour que la somme des volumes des 2 cubes soit minimale. On donne AB=BC=1 et on pose AH=x où $x\in[0\,;1]$. On note V la fonction qui à x fait correspondre la somme des volumes des cubes.

1. Montrez que $V(x)=3x^2-3x+1$. Justifiez
2. Déduisez-en la position de M sur [AC] pour répondre au problème. Justifiez.



Ex : Un maximum

Soit une sphère de rayon 1 et de centre O dont [SS'] est un diamètre. On inscrit un cône dans cette sphère comme l'indique le. On cherche à déterminer la position de O', le centre de la base du cône, pour que le volume du cône soit maximum.



Ex : volume maximum

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1cm. Soit I∈[AE], J∈[AB] et K∈[AD] tels que IE=AJ=AK=x.

3. Où varie x ? Justifiez.
4. Montrez que le volume de la pyramide AIJK est v(x)=$\frac{1}{6}(1-x)x^2$. Justifiez.
5. Dressez un tableau de valeurs de v sur l'intervalle adéquat.

6. Tracez la courbe représentative de v dans un repère orthogonale $(O;\vec{i},\vec{j})$.
7. Pour quelle valeur de x la pyramide AIJK a-t-elle un volume maximum ? Justifiez.

-- Limites--

Ex :

Déterminez,si elle existe, la (ou les) limites en a des fonctions ci-dessous :

1. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{4x}$ pour a=0

2. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ pour a=1

3. $f(x)=\dfrac{2x^4-x^3+3}{3x^3+x^2+2}$ pour a=-1

4. $f(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2+3}-1}$ pour a=-1

-- Etudes complètes--

Ex : problème.

Soit f(x)=$\frac{x^2-1}{x+2}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal.

1. Déterminez les domaines de définition et de dérivation de f ainsi que ses racines.
2. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les asymptotes à la courbe de f.
3. Déterminez f'(x).
4. Déterminez les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Déterminez $\lim\limits_{+\infty}$ (f(x) –x+2). Qu'en déduisez-vous ? Justifiez.
6. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f en -1.
7. Tracez la courbe représentative de f sur]-2 ;+oo[.

Ex :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner le domaine de définition, de dérivation et la fonction dérivée. Etudier ensuite les limites aux bornes de son domaine de définition et les variations de la fonction sur son domaine de définition.

1. $f(x)=\frac{x^2-x+6}{x^2+x-6}$.
2. $f(x)=(x-3)\sqrt{2x+3}$.

Ex : Etude complète.

Soit f(x)=$\frac{2x^2-2x-4}{x^2+x-2}$.

1. Donner le domaine de définition Df et de dérivation Df' de f.
2. Résoudre f(x)=0
3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. En déduire les équations des asymptotes à la courbe C de f. On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.
5. Montrer que f'(x)=$\frac{4(x^2+2)}{(x^2+x-2)^2}$. Etudier le signe de f'(x) sur Df
6. Dresser le tableau de variation de f .
7. Déterminer les équations des tangentes de f en 0 et en 2.
8. On sait que l'équation de la tangente en -3 est y=$\frac{11}{4}x+\frac{53}{4}$. En utilisant les résultats précédents, tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé la courbe représentative de f sur [-7 ;7]

Ex : Etude complète.

Soit $f(x)=\frac{x^2-x-2}{1-x}$

1. Déterminez Df et le domaine de dérivation de f.
2. Etudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminez f'(x) puis un tableau de variation de f.
4. Déterminez une équation des tangentes en -1 et 2.

5. Montrez que (d):y=-x est une asymptote oblique en +oo et –oo. Précisez la position de la courbe de f par rapport à (d).
6. Utilisez les questions précédentes pour tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex : Etude d'une fonction

Soit f(x)=$\frac{3x^2}{x^2+x+1}$. On se place dans un repère orthonormé $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminez les domaines de définition et de dérivation de f.
2. Démontrez que f'(x)=$\frac{3x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$.
3. Déterminez les équations des tangentes à la courbe représentative de f en -1 et 1.
4. Etudiez le signe de f' et déduisez-en les variations de f.
5. Tracez toutes les tangentes à la courbe de f déterminées précédemment.
6. Tracez clairement et précisément la courbe représentative de f sur [-6 ;6]

Ex : Etude complète.

Soit f(x)=$\frac{2x^2-2x-4}{x^2+x-2}$.

1. Donner le domaine de définition Df et de dérivation Df' de f.
2. Résoudre f(x)=0
3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. En déduire les équations des asymptotes à la courbe C de f. On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote horizontale.
5. Montrer que f'(x)=$\frac{4(x^2+2)}{(x^2+x-2)^2}$. Etudier le signe de f'(x) sur Df
6. Dresser le tableau de variation de f .
7. Déterminer les équations des tangentes de f en 0 et en 2.
8. On sait que l'équation de la tangente en -3 est y=$\frac{11}{4}x+\frac{53}{4}$. En utilisant les résultats précédents, tracer dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé la courbe représentative de f sur [-7 ;7]

Ex : Etude complète.

Soit f(x)=$\frac{x^2-1}{x+2}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal.

1. Déterminez les domaines de définition et de dérivation de f ainsi que ses racines.
2. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les asymptotes à la courbe de f.
3. Déterminez f'(x).
4. Déterminez les variations de f sur son ensemble de définition.

5. Déterminez $\lim\limits_{+\infty}$ (f(x) –x+2). Qu'en déduisez-vous ? Justifiez.
6. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f en -1.
7. Tracez la courbe représentative de f sur]-2 ;+oo[.

Ex : Etude d'une fonction

Soit $f(x) = x \times \sqrt{x}$ de courbe représentative C

1) Donner le domaine de définition Df et celui de dérivation.Df'
2) Donner la fonction dérivée de f.
3) Etudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de f sur Df.
4) Calculer f'(1) et f'(3). Tracer les tangentes à *C aux* abscisses 1 et 3.
5) En utilisant 3 et 4, tracer *C.*
6) Résoudre graphiquement f(x)<2.