Probabilités

I. Probabilités élémentaires.

1. Loi de probabilité d'un univers.

Déf :

Soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

- Ω est appelé univers.
- Un résultat possible est appelé éventualité.
- Toute partie de Ω est appelé événement.
- Ω est un événement certain.
- Ø est un événement de Ω appelé événement impossible.

Ex 1:

Dans un urne, il y a 4 boules numérotées de 1 à 4. On en tire une au hasard.

$\Omega=\{1;2;3;4\}$.

$E=\{1;3\}$ est un événement de Ω correspondant à « tirer un numéro impair ».

Déf :

On définit une loi de probabilité p sur un univers $\Omega=\{w_1;w_2;...;w_n\}$ en associant à chaque éventualité w_i un nombre réel $p(w_i)= p_i$ tel que :

- pour tout i $i\in 1;2;..;n$, $p_i\in[0;1]$
- $p_1+p_2+...+p_n=1$

On dit que p_i est la probabilité de l'événement w_i.

Déf :

Si A est un événement de Ω, on appelle probabilité de A la somme des probabilités des éventualités de A:
Si $A=\{a_1;a_2;...;a_k\}$ alors $p(A)=p(a_1)+p(a_2)+...+p(a_k)$.

Ex 2 :

En reprenant Ex 1, $p(E)=p(\{1\})+p(\{3\})$.

Rem :

$P(\Omega)=1$ et $p(\varnothing)=0$.

2. Equiprobabilité.

Déf :

Lorsque toutes les éventualités d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, on dit qu'elles sont équiprobables ou que la loi est une loi de probabilité uniforme.

Dans ce cas, si l'univers Ω possède un nombre n entier d'éventualités :

- la probabilité de chaque éventualité est $\frac{1}{n}$.
- si un événement A de Ω est tel que A contient k éventualités alors $p(A)=\frac{k}{n}$.

Ex :

On reprend l' ex 1, si on ne triche pas et que les boules sont identiques, l'expérience est équiprobable. On a alors la probabilité de chaque éventualité qui est de $\frac{1}{4}$.

La loi de probabilité de cette expérience est donc donné par :

Résultat	***1***	***2***	***3***	***4***
probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. Union et intersection

Déf :

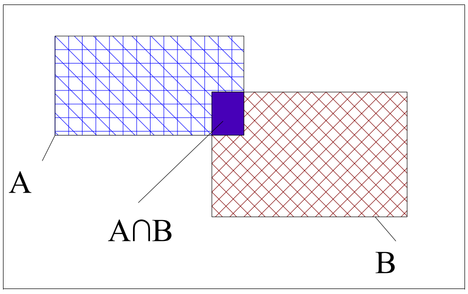
- La réunion de 2 événements A et B et un événement noté AuB aussi appelé A « ou » B.
- L'intersection de 2 événements A et B et un événement noté $A\cap B$ aussi appelé A « et » B.
- Lorsque $A\cap B=\varnothing$ on dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.
- On appelle événement contraire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, l'ensemble de tous les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.

Prop :

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

- Si A et B sont disjoints p(AuB)=p(A)+p(B).
- Si A et B ne sont pas disjoints p(AuB)=p(A)+p(B)-p(A∩B).
- A et $\bar{A}$ sont disjoints et p($\bar{A}$)=1-p(A).

Dém :



- P(A) est la somme des probabilités des éventualités de A.
- P(B) est la somme des probabilités des éventualités de B.
- P(A∩B) est la somme des probabilités des éventualités de A∩B.
- P(AuB) est la somme des probabilités des éventualités de AuB.

Les éventualités de A∩B sont à la fois dans A et dans B : dans p(A)+p(B), on compte donc deux fois les éventualités de A∩B : p(AuB) est la somme des probabilités des éventualités de A et de B moins la somme des probabilités des éventualités de A∩B.

CQFD

Ex 3 :

Dans un jeu de 32 cartes non marqués, on tire au hasard une carte. Quelle est la probabilité des événements A=« la carte est rouge », B= « la carte est un as », A∩B et AuB ?

Ici l' univers Ω est le jeu de 32 cartes.

- A contient 16 éventualités donc p(A)= $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$.
- B contient 4 éventualités donc p(B)= $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.
- A∩B=«un as rouge» ne contient que deux éventualités donc p(A∩B)= $\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$.
- AuB=« un as ou une carte rouge ».

Attention de ne pas compter deux fois les as rouges : il y a 16+**2**=18 éventualités:

p(AuB)= $\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$

On a bien p(AuB)=p(A)+p(B)-p(A∩B).

II. Variables aléatoires.

Déf :

Soit un univers Ω fini muni d'une loi de probabilité p. On appelle variable aléatoire sur Ω toute application de X de Ω vers un ensemble Ω'.

Si $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$, on appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X l'application qui a tout x_i fait correspondre p(« $X=x_i$ »).

Ex 4 :

On lance un dé à six faces non truqué : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$. Nous sommes dans un cas équiprobable donc la probabilité d'une éventualité est $\frac{1}{6}$.

Si le résultat est plus petit que 5 strictement, on perd 2 euros. S'il vaut 5, on gagne 1 euros et s'il vaut 6 on gagne 3 euros : nous venons de créer un variable aléatoire X de Ω telle que :

X(1)=X(2)=X(3)=X(4)=-2, X(5)=1 et X(6)=3.

Les gains possibles sont $x_1=-2$, $x_2=1$ et $x_3=3$: la loi de probabilité de cette variable aléatoires est donné par :

x_i	-2	+1	+3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Déf :

Soit un univers Ω fini muni d'une loi de probabilité p et une variable aléatoire numérique X telle que $X(\Omega)=\{x_1;x_2;...;x_n\}$.

- On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le réel :

  $E(X)=x_1p(X=x_1)+x_2p(X=x_2)+...+x_np(X=x_n)$.

- On appelle espérance de X le réel positif :

  $V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-E(X))^2p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{i=n}x^2{}_i\,p(X=x_i)-E(x)^2$.

- On appelle écart-type de X le réel positif $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Rém :

Il faudrait démontrer que $\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - E(X))^2 p(X=x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x^2{}_i\, p(X=x_i) - E(x)^2$ mais il s'agit de la même démonstration que pour les variances étudiées en statistiques .

Ex : 5.

En reprenant l'exemple 4,

- E(X)= $-2 \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{-2}{3}$: la perte moyenne par partie sera de $\frac{-2}{3} \approx -0{,}7\, euros$ si on fait un très grand nombre de parties.
- V(X)= $(-1 - \frac{-2}{3})^2 \times \frac{4}{6} + (1 - \frac{-2}{3})^2 \times \frac{1}{6} + (3 - \frac{-2}{3})^2 \times \frac{1}{6} - (\frac{-2}{3})^2 = \frac{19}{9}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{19}/3 \approx 1{,}45$

Si on fait un très grand nombre de parties :
La perte moyenne par partie sera de $\frac{-2}{3} \approx -0{,}7\, euros$ et les gains ou pertes se situeront à une distance moyenne de 1,45euros par rapport à -0,7 euros.