# Polynômes et Equation du second degré

## I. Généralités.

### 1. Définitions.

- On appelle fonction polynôme tout fonction s'écrivant sous la forme $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ où $a_1,\ldots a_n$ sont des réels et $n\in\mathbb{N}$
- $x \mapsto a_i x^i$ est un monôme de degré i et de coefficient $a_i$.
- Le degré d'un polynôme est celui de son monôme de plus haut degré.

**Ex :** $p(x)=3-4x^2+2x^3$ est un polynôme de degré 3.

### 2. Propriétés.

**Prop :** produit de polynômes et degré.

Le produit d'un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et d'un polynôme de degré $m\in\mathbb{R}$ est un polynôme de degré n+m.

**Dém :** Il suffit de poser le calcul.

**Prop(admise) :** Egalité de polynômes.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si il ont même degré et que les coefficients des tous leurs monômes de même degré sont égaux.

**Prop(admise) :** Factorisation par x-a.

Si un polynôme P de degré $n\in\mathbb{N}^*$ s'annule pour x=a alors il est factorisable par x-a et il existe un unique polynôme Q de degré n-1 tel que $P(x)=Q(x)(x-a)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On dit que a est une **racine** de P.

**Ex : Méthode par identification.**

Soit $p(x)=x^3-2x^2+2x-1$. P est de degré 3.
$P(1)=0$ donc il existe un polynôme Q de degré 3-1=2 tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$.

Comme Q est de degré 2, il s'écrit $Q(x)=ax^2+bx+c$ avec a,b,c réels.

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+2x-1 &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \end{aligned}$$

Or deux polynômes égaux si et seulement si il ont même degré et que les coefficients des tous leurs monômes de même degré sont égaux.

D'où $\begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b-a=-2 \\ c-b=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=-1 \end{cases}$ On a $p(x)=(x-1)(x^2-x+1)$

# II. Résolution de ax²+bx+c=0

## 1. Pour débuter

On appelle ***équation du second degré*** une équation du style $ax^2+bx+x=0$ où a, b et c sont des réels connus (a<>0) et x l'inconnue à déterminer. Pour résoudre ce type d'équation on utilisera généralement la méthode dite « du déterminant ». Cette méthode permet avec un minimum de calculs de trouver, s'il y en a, la ou les solutions. Elle découle d'une factorisation et d'une résolution de deux équations du premier degré.

## 2. Forme canonique

On appelle ***forme canonique*** de $ax^2+bx+c$ son écriture qui ne contient qu'une seule fois la variable x.

Cas général :

- Factorisons par a : $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$
- Considérons $x^2+\frac{b}{a}x$ comme début du développement de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ : c'est la ruse.

  $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$ On a rajouté les 2 derniers termes pour maintenir l'égalité.
- Reste à simplifier la parenthèse :

  $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$
- Nous venons de trouver la forme canonique de $ax^2+bx+c$.

Ex : $ax^2+bx+c=12x^2-6x+2$

La forme canonique de $12x^2-6x+2$ est $12\left(\left(x+\frac{-6}{24}\right)^2-\frac{36-93}{576}\right)=12\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{60}{576}\right)=12\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{48}\right)$

**Déf :** on note $\Delta=b^2-4ac$ . $\Delta$ est appelé ***déterminant*** de l'équation $ax^2+bx+c$.

## 3. Résolution de ax²+bx+c=0

On a vu $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, il n'y a donc aucune solution réelle.
- Si $\Delta\geq 0$,

  $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)=a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

-Si $\Delta>0$ il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

-Si $\Delta=0$ les deux solutions sont égales et ne font qu'une $x=\dfrac{-b}{2a}$

### 4. Exemples

**Ex 1 :** Résoudre $2x^2+2x-4=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times-4=4+32=36$

$\Delta>0$, il y a donc 2 solutions :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{36}}{4}=\dfrac{-2+6}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{36}}{4}=\dfrac{-2-6}{4}=-2$

**Ex 2 :** Résoudre $2x^2-12x+18=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times18\times2=144-144=0$

$\Delta=0$, il y a donc une unique solution :

$x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{12}{4}=3$

**Ex 3 :** Résoudre $3x^2-2x+13=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times13=4-156=-152$

- $\Delta<0$, il n'y a donc aucune solution.

## III. Polynôme de degré 2

### 1. Définition

On appelle ***polynôme du second degré*** la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ définie sur $\mathbb{R}$. Les solutions de $ax^2+bx+c=0$ sont appelées ***racines*** du polynôme f.

### 2. Factoriser grâce aux racines

**Prop :** Si $ax^2+bx+c=0$ admet pour solutions $x_1$ et $x_2$ ( qui peuvent être égales) alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

**Dém :** Il suffit de reprendre le II.3.

$ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})=a(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})=a(x-x_1)(x-x_2)$

**Ex :** On a vu que 1 et –2 sont solutions de $2x^2+2x-4=0$ donc $2x^2+2x-4=2(x-1)(x-(-2))=2(x-1)(x+2)$

### 3. Signe de f(x)=ax²+bx+c

On rappelle que $f(x)=ax^2+bx+c= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$

On distingue 3 cas :

- $\Delta<0$, on a vu au 3. qu'alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. f est donc du signe de a.
- $\Delta=0$, le polynôme a une unique racine r et peut s'écrire $a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$. Il est donc du même signe que a sur $\mathbb{R}$.
- $\Delta>0$, le polynôme a 2 racines $r_1$ et $r_2$ et peut s'écrire $a(x-r_1)(x-r_2)$. D'où le tableau de signe suivant :

| | $-\infty$ | | $r_1$ | | $r_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $-$ | |
| $x-x_2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| a | | signe de a | | signe de a | | signe de a | |
| P | | signe de a | 0 | $\ominus$ signe de a | 0 | signe de a | |

Le polynôme est donc du signe de a entre les racines et de signe contraire ailleurs.

## IV. Interprétation graphique

### 1. Paraboles.

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.
La courbe représentative d'un polynôme de degré deux est une ***parabole.***

**Dém :** On Utilise les fonctions associées : f(x)=a ((x-k)+k') $=a\left(\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

On a donc besoin d'une simple translation de vecteur $\frac{b}{2a}\vec{i}-\frac{\Delta}{4a^2}\vec{j}$ pour passer de la fonction $g(x)=a\,x^2$ à $f(x)= a\left(\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

**Conséquence :** Le sommet de la parabole est $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

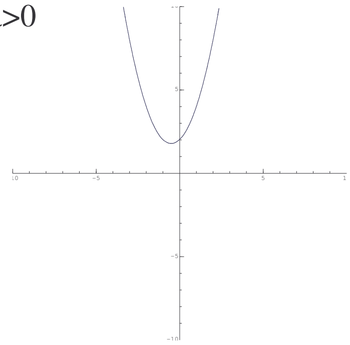
**Dém :** Grâce à la démonstration précédente,on sait que le sommet de la parabole est atteint en $x=\frac{-b}{2a}$

Puisque la parabole à pour équation $y=a\left(\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ d'après I.3,on obtient l'ordonnée de S en remplaçant x par $\frac{-b}{2a}$ : $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

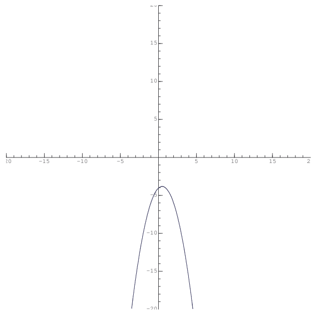
### 2. Récapitulation et graphiques

- Δ<0. La courbe ne touche jamais l'axe des abscisses. Elle est donc au dessus ou en dessous. Le 4. Permet d'affirmer :

a>0

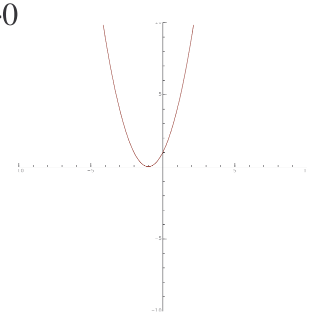


a<0

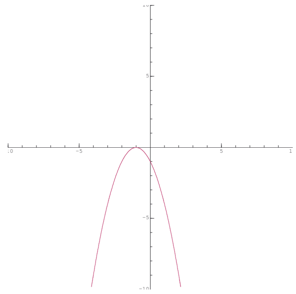


- Δ=0. La courbe touche l'axe des abscisses sans le traverser puisqu'elle ne change pas de signe. D'où:

a>0

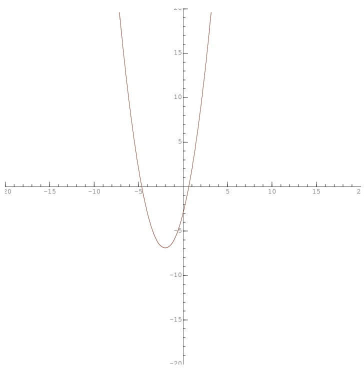


a<0



- Δ>0. La courbe coupe l'axe des abscisses à l'endroit correspondant aux 2 racines de l'équation. D'après le 4., on peut en déduire les 2 cas de figures :

a>0



a<0