GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) Opérations sur les fonctions.

1) Egalité de deux fonctions :

Dire que deux u et v sont égales (on note $u = v$) signifie que :

- u et v ont le même ensemble de définition D ;
- pour tout réel x de D, $u(x) = v(x)$.

Ex :

- u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ – { -1} par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

Les fonctions u et v ont le même ensemble de définition et pour tout réel $x \neq -1$,
$u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3(x+1)-2}{x+1} = \dfrac{3x+1}{x+1} = v(x)$. Donc $u = v$.

2) Opérations sur les fonctions :

Soit u et v deux fonctions définies sur le **même** ensemble D, et k un réel non nul.

opération	notation	définition	définie pour :
fonction somme de u et du réel k	$u+k$	$(u+k)(x) = u(x) + k$	D
fonction produit de u et du réel k	ku	$(ku)(x) = k \times u(x)$	D
fonction somme des fonctions u et v	$u + v$	$(u+v)(x) = u(x) + v(x)$	D
fonction produit des fonctions u et v	uv	$(uv)(x) = u(x) \times v(x)$	D
fonction inverse de la fonction v	$\dfrac{1}{v}$	$(\dfrac{1}{v})(x) = \dfrac{1}{v(x)}$	D et $v(x) \neq 0$
fonction quotient de la fonction u par v	$\dfrac{u}{v}$	$(\dfrac{u}{v})(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	D et $v(x) \neq 0$

Ex :

u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 3$.

- pour tout réel x , $(u+v)(x) = x^2 + x + 3, (uv)(x) = x^2(x+3), (2u) = 2x^2, (u+2)(x) = x^2 + 2$;
- pour tout réel $x \neq -3$, $(\dfrac{1}{v})(x) = \dfrac{1}{x+3}$ et $(\dfrac{u}{v})(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$.

3) Variations : (dém en exercices)

Soit u et v deux fonctions définies sur le **même** ensemble D, et k un réel non nul.

- Les fonctions u et $u + k$ ont le même sens de variation sur D.

- Si $k > 0$, les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur D.
  Si $k < 0$, les fonctions u et ku ont des sens de variation contraire sur D.

- Si u et v sont croissantes sur D, alors $u + v$ est croissante sur D.
  Si u et v sont décroissantes sur D, alors $u + v$ est décroissante sur D.

ATTENTION:

Si on connaît le sens de variation des deux fonctions u et v, on ne peut rien dire de façon générale sur le sens de variation des fonctions produit uv et quotient $\frac{u}{v}$. De même si u et v varie de sens contraire, on ne peut pas conclure pour la somme $u + v$. Il nous faut un outil plus performant : à voir dans les prochains épisodes !

II) Composition de fonctions.

1) Définition :

Soient u et v deux fonctions telle que u prends ses valeurs dans le domaine de définition de v. On appelle fonction composée de u par v, la fonction obtenue par le montage :

$$f : x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x))$$

On note $f(x) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$ (on lit « u suivie de v » ou « v rond u »).

ATTENTION:

$v(u(x))$ n'a de sens que si $x \in D_U$ et $u(x) \in D_V$: Attention au domaine de définition D_{VoU}

Ex : Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x - 1$ et la fonction v définie sur $\mathbb{R}^*$ par $v(x) = \frac{1}{x}$

- $v \circ u : x \mapsto x - 1 \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

  $v \circ u$ est définie si, et seulement si $x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$: si et seulement si $x \neq 1$

  ainsi $D_{v \circ u} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ et $(v \circ u)(x) = \dfrac{1}{x-1}$

- $u \circ v : x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x} - 1$

  $u \circ v$ est définie si, et seulement si, $x \in D_v$ et $v(x) \in D_u$, si et seulement si $x \neq 0$.

  Ainsi $D_{u \circ v} = \mathbb{R}^*$ et $(u \circ v)(x) = \frac{1}{x} - 1$

Remarque : En général $v \circ u$ est **différent** de $u \circ v$.

2) Variations :

Soient u une fonction monotone définie sur I et v une fonction monotone définie sur J telles que : pour tout x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.

- Si u et v ont même sens de variation, alors $v \circ u$ est croissante sur I.
- Si u et v ont des sens de variation contraire, alors $v \circ u$ est décroissante sur I.

Dém partielle :

Supposons que u est croissante sur I avec $a \in$ I et $b \in$ I tels que $a \leq b$: on a $u(a) \leq u(b)$.

- Si v est croissante sur J, alors $v(u(a)) \leq v(u(b))$.

Ainsi $v \circ u$ est croissante.

- Si v est décroissante sur J, alors $v(u(a)) \geq v(u(b))$.

Ainsi $v \circ u$ est décroissante.

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Elle obtenue composition : $x \mapsto x^2 \mapsto \frac{1}{x^2}$

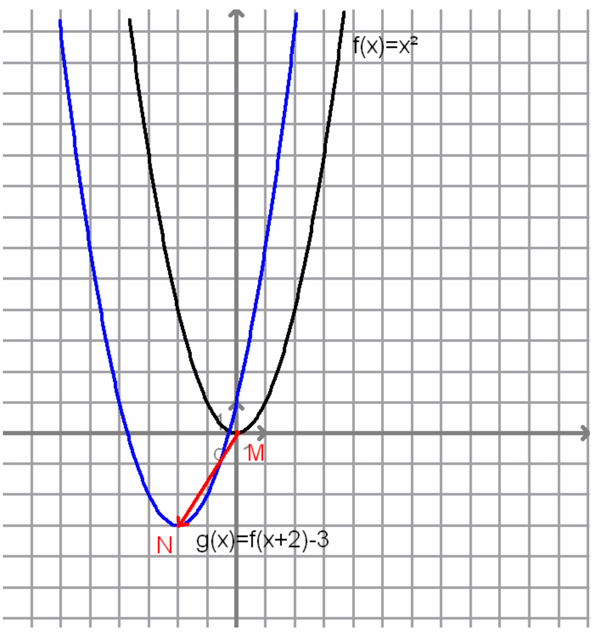
$u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = (v \circ u)(x)$

On sait que la fonction carré strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0 ;+\infty[$. En conclusion on peut affirmer que f est strictement croissante sur $]-\infty ;0[$.

On sait que la fonction carré strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty ;0[\cup]0 ; +\infty[$. En conclusion on peut affirmer que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

III) Représentation de fonctions :

Soit f une fonction définie sur D et k un reél . On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan.



- la courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x) + k$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

- la courbe représentative de la fonction $g(x) = f(x) + k$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $-k\vec{i}$.

(Voir TD sur Grafix…)