Comportement Asymptotique.

Dans I et II , a et l ,m et p sont des réels et n est un entier supérieur ou égal à 1

I. Limites en +∞ et –∞.

1. Limite infinie.

Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.

- Dire que f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞ signifie que les valeurs de f(x) sont aussi grandes que l'on veut dès que x est assez grand. On écrit : $\lim\limits_{x->+oo} f(x) = +oo$ ou $\lim\limits_{+oo} f(x) = +oo$.
- Dire que f(x) tend vers -∞ lorsque x tend vers +∞ signifie que les valeurs de f(x) sont aussi petites que l'on veut dès que x est assez grand. On écrit : $\lim\limits_{x->+oo} f(x) = -oo$ ou $\lim\limits_{+oo} f(x) = -oo$.

Remarque: On peut poser les mêmes définitions lorsque x tend vers –∞ et f est définie sur]-∞ ;a].

Limites à connaître :

$\lim\limits_{x->+oo} \sqrt{x} = +oo$ $\lim\limits_{x->+oo} -\sqrt{x} = -oo$ $\lim\limits_{x->+oo} x^n = +oo$ $\lim\limits_{x->+oo} -x^n = -oo$

Si a>0 alors $\lim\limits_{x->+oo} ax+b = +oo$ mais si a<0, $\lim\limits_{x->+oo} ax+b = -oo$.

Si n est pair, $\lim\limits_{x->-oo} x^n = +oo$ mais si n est impair, $\lim\limits_{x->-oo} x^n = -oo$.

2. limite finie.

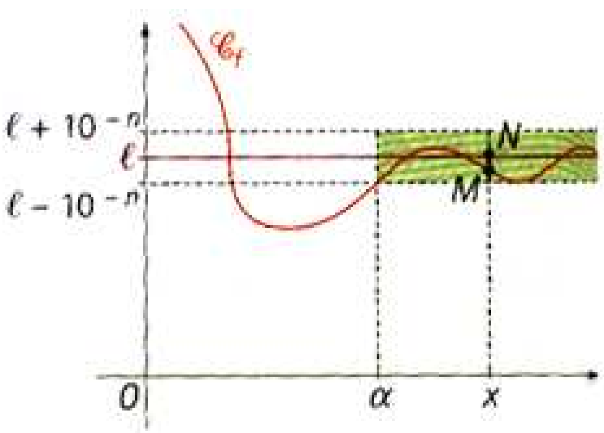
- Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.

Dire que f(x) tend vers l lorsque x tend vers +∞ signifie que les valeurs de f(x) sont aussi proches de l que l'on veut dès que x est assez grand. On écrit : $\lim\limits_{x->+oo} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{+oo} f(x) = l$.

- Soit f une fonction définie sur]-∞ ;a]

Dire que f(x) tend vers l lorsque x tend vers -∞ signifie que les valeurs de f(x) sont aussi proches de l que l'on veut dès que x est assez petit. On écrit : $\lim\limits_{x->-oo} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{-oo} f(x) = l$.

Exemple :



Voici la courbe représentative d'une fonction f.
La distance entre f(x) et l est MN=$\lfloor f(x) - l \rfloor$.
MN peut être rendue aussi petite que l'on veut lorsque x devient assez grand.

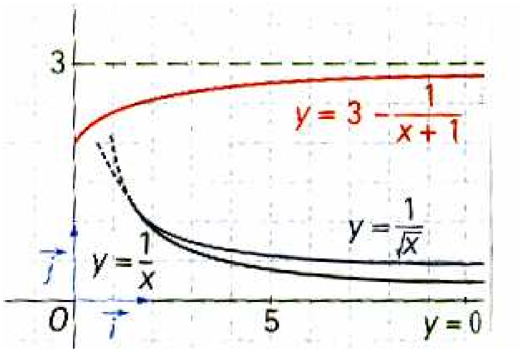
Remarque : Si la fonction tend vers l en restant supérieure à l, on dit qu'elle tend vers l^+.De même, si la fonction tend vers l en restant inférieure à l, on dit qu'elle tend vers l^-.

Limites à connaître :

- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0^+ en $+\infty$.
- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ (avec n pair) et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0^+ en $-\infty$.
- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ (avec n impair) ont pour limite 0^- en $-\infty$.

3. Asymptote.

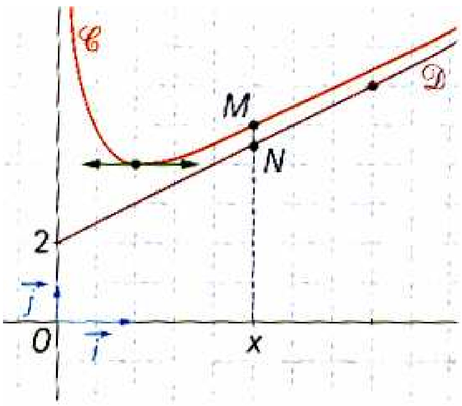
- Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.Si $\lim\limits_{+oo} f(x) = l$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y=l en +∞.



- La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet y=0 comme asymptote en +∞.
- La fonction g(x)=$3 - \frac{1}{x+1}$ admet y=3 comme asymptote en +∞.

- Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.Si $\lim\limits_{+oo} f(x) - (mx + p) = 0$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation y=mx+p en +∞.

Exemple :



Ci-contre, voici la représentation de f(x)=$x + 2 + \frac{1}{x}$.

f(x)-(x+2)=$\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{+oo} f(x) - (x+2) = 0$ et y=x+2 est asymptote à la courbe de f en +∞.

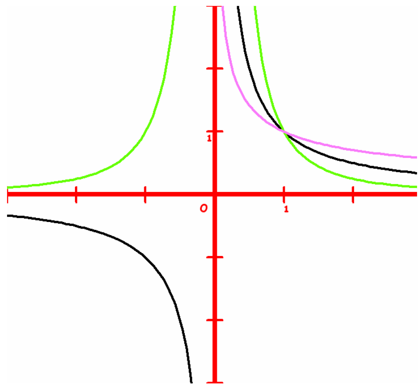
Remarque : On peut poser les mêmes définitions lorsque x tend vers –∞ et f est définie sur]-∞ ;a].

II. Limite infinie en a.

Déf : Soir f une fonction définie sur un ensemble E sauf en un réel a de E. Dire que f(x) tend vers +∞ (resp -∞) lorsque x tend vers a signifie qu'on peut rendre f(x) aussi grand (resp petit) que l'on veut en prenant x assez proche de a en restant dans E. On note : $\lim\limits_{x->a} f(x) = +oo$. (resp $\lim\limits_{x->a} f(x) = -oo$).

Remarque : Parfois, la limite de f(x) lorsqu'on se rapproche de a par la droite ($\lim\limits_{a^+}$) est différente de celle de f f(x) lorsqu'on se rapproche de a par la gauche ($\lim\limits_{a^-}$).

Limites à connaître :



- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ (avec n pair) et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite $+\infty$ en 0. Aussi bien à droite (0^-) qu'a gauche (0^+)

- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ avec n impair pour limite $+\infty$ en 0 à droite (0^+) mais $-\infty$ à gauche (0^-)

Définition : Si la limite en a d'une fonction f est infinie, on dit qu'elle admet une asymptote verticale d'équation x=a. C'est par exemple le cas des fonctions ci-dessus : x=0 est pour elles une asymptote verticale.

III. Opérations sur les limites.

Pour le III. , a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. l et l' désignent des réels.

- Somme de fonctions

Si $\lim\limits_a f(x) =$	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
Et $\lim\limits_a g(x) =$	l'	l' ou $+\infty$	l' ou $-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_a (f+g)(x) =$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure tout de suite

- Produit de fonctions

Si $\lim\limits_a f(x) =$	l	l >0 ou $+\infty$	l<0 ou $-\infty$	l >0 ou $+\infty$	l<0 ou $-\infty$	0
Et $\lim\limits_a g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_a (f \times g)(x) =$	l×l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	On ne peut pas conclure tout de suite

- Inverse d'une fonction

Si $\lim\limits_a f(x) =$	l≠0	l=0 et f(x)>0	l=0 et f(x)<0	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_a (\frac{1}{f})(x) =$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarques :

- Pour obtenir $\frac{f}{g}$, Il suffit de combiner produit et inverse
- Dans les 2 cas où on ne peut pas conclure tout de suite, il y a une indétermination. Il faut alors modifier l'écriture de la fonction pour lever cette indétermination.

Exemple : f(x)=$\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}$. Df=]0 ;$+\infty$[: Il y a deux limites à déterminer.

- On veut trouver la limite de f en 0^+ (à droite car f n'est pas définie si x<=0).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{0} x^2 = 0 \\ \\ Lim\limits_{0} -3 = -3\end{array}\right\} donc \lim\limits_{0} x^2 - 3 = 0$$

$$\lim\limits_{0} \sqrt{x} = 0^+ \qquad donc \lim\limits_{0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +oo$$

On ne peut conclure tout de suite : il faut lever cette indétermination de type 0×∞.

$$\lim\limits_{0} \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{0} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{0} x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Or , $\lim\limits_{0} x\sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{0} -\frac{3}{\sqrt{x}} = -oo$ donc $\lim\limits_{0} f(x) = -oo$

- <u>On veut déterminer la limite de f en +∞.</u>

On a de nouveau une indétermination : $\frac{+oo}{+oo}$ si on ne modifie pas l'écriture de f.

$$\lim\limits_{+oo} f(x) = \lim\limits_{+oo} x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim\limits_{+oo} x\sqrt{x} = +oo$ et $\lim\limits_{+oo} -\frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ donc : $\lim\limits_{+oo} f(x) = +oo$.

<u>Le cas des polynômes.</u>

<u>Prop (vu en td):</u> En +oo et –oo, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du monôme de plus haut degré.

<u>Ex :</u> $\lim\limits_{+\infty} 2x^2 - 3x^3 + 2 = \lim\limits_{+\infty} -3x^3 = -\infty$

<u>Le cas des fonctions rationnelles.</u>

<u>Prop (vu en td):</u> En +oo et –oo, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

<u>Ex :</u> $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{3x^2 + x - 1}$

$$l\,im_{+oo} f(x) = l\,im_{+oo} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

IV. <u>Limites et encadrements.</u>

<u>Théorème des gendarmes :</u>

Soit a et l deux réels. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un ensemble E contenant a et telles que $\lim\limits_{a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{a} h(x) = l$.

Si $g \le f \le h$ sur E alors $\lim\limits_{a} f(x) = l$

<u>Dém :</u>
On reprend les hypothèses du théorème. Sur I, on a:

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
$g(x) - l \leq f(x) - l \leq h(x) - l$

Comme on peut rendre g(x)-l et h(x)-l aussi petit que l'on veut, on peut également rendre f(x)-l aussi petit que l'on veut. Donc, $\lim\limits_{a} f(x) = l$. CQFD.

Remarque : En gardant les notations et hypothèses du théorème, on a de la même façon :

- Si $\lim\limits_{a} g(x) = +oo$ alors $\lim\limits_{a} f(x) = +oo$
- Si $\lim\limits_{a} h(x) = -oo$ alors $\lim\limits_{a} f(x) = -oo$