# Calcul vectoriel

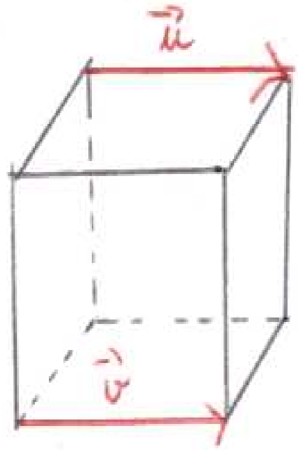
## I. Vecteurs dans l'espace

### 1. Opérations de base

La notion de vecteur du plan s'étend à l'espace. Dans un plan de l'espace, on peut appliquer toutes les propriétés vectorielles de la géométrie plane. Les règles vectorielles du plan se prolongent à l'espace.

**Déf :**

- Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par sa norme $\|\vec{u}\|$, sa direction et son sens.
- Un vecteur de norme nul est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$ .

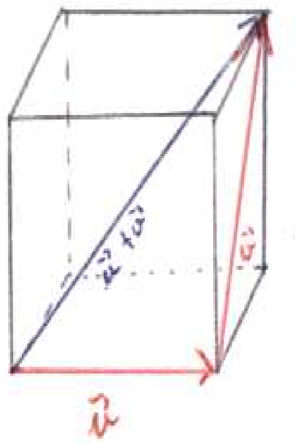



**Prop 1 : égalité de deux vecteurs**

| |
|---|
| $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ [AD] et [BC] ont le même milieu. |

**Prop 2 : Relation de Chasles et règle du parallélogramme**

| |
|---|
| Pour tous les points A,B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ . |




**Prop 3 : Règles de calcul.**

Elles sont les même que dans le plan :

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v} \quad k\in\Re$

$(k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u}$

$k\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \quad ou \quad k=0$

Tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

## 2. Colinéarité dans l'espace

**Déf :**

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réels k≠0 tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

**Prop :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (AB) et (CD) sont parallèles
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- il existe k≠0 tel que $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$

**Repère et caractérisation d'une droite**

- Un repère d'une droite (d) est un couple $(O;\vec{u})$ où O est un point de la droite (d) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (d). O est l'origine du repère et $\vec{u}$ en est le vecteur unitaire : pour tout point A de (d), il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OA} = k\vec{u}$.

- Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{R}$ est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.

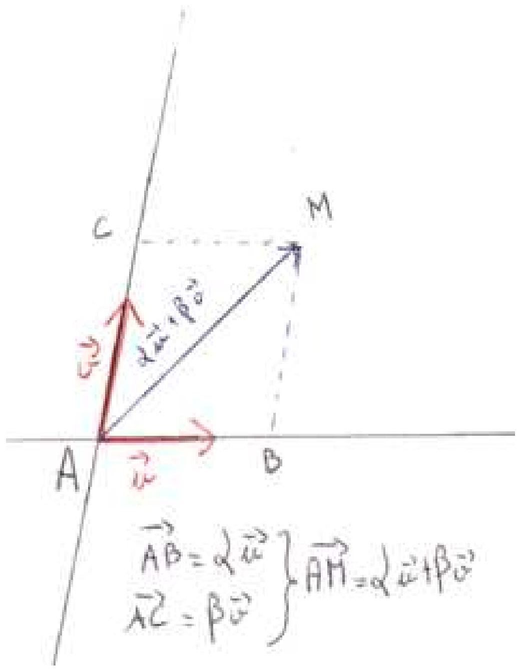
- Par conséquence pour tout point A,B,C de l'espace , si il existe un réel k≠0 tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors les points A,B et C sont alignés.

# II. Vecteurs coplanaires

**Caractérisation d'un plan.**

Soit A un point de l'espace et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. L'ensemble $\mathscr{P}$ des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec α et β réels est le plan de repère $(A;\vec{u},\vec{v})$.

Dans ce repère, Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ il existe un unique couple (α,β) tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. M y a pour coordonnée (α,β)



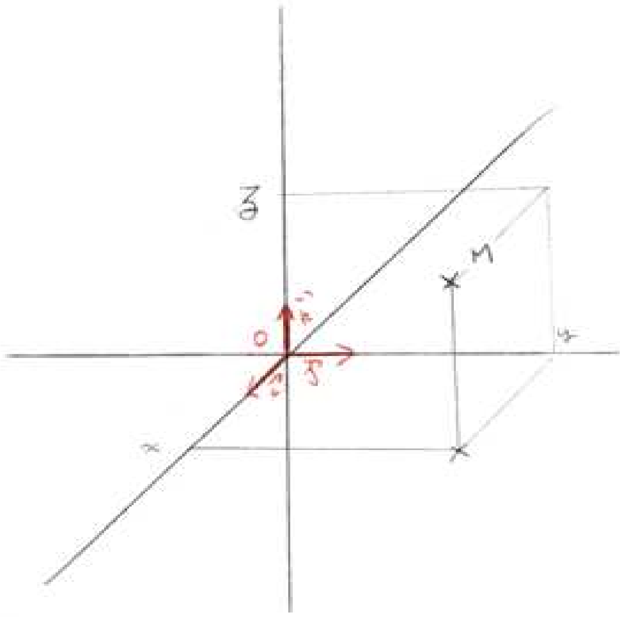

**Définition :**

3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si il existe deux réel α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. On dit que $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

# III. Repère de l'espace.

## 1. Définition

Si O est un point de l'espace et $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires, alors, pour tout point M de l'espace, Il existe un unique triplet (x ;y ;z) tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ . M a pour coordonnée (x ;y ;z) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ , x étant l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote. De même les coordonnées du vecteurs se notent $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.




## 2. Calcul dans un repère.

**Dans** $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **:**

- Si A($x_A$,$y_A$,$z_A$) et B($x_B$,$y_B$,$z_B$) alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_b-x_a\\y_b-y_a\\z_b-z_a\end{pmatrix}$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ pour tout réel k.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'\end{cases}$

**Dans** $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **orthonormé :**

- Si A($x_A$,$y_A$,$z_A$) et B($x_B$,$y_B$,$z_B$) alors AB=$\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2}$ .
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ .