Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques.

1. Définition.

Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ pour laquelle il existe un réel r tel que pour tout $n>n_0$, $U_{n+1}=U_n+r$ est appelée suite arithmétique de premier terme U_{n0} et de raison r.

Ex : $U_{n+1}=U_n+2$ et $U_0=0$: $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison 2.

On a : $U_1=0+2=2$; $U_2=2+2=4$; $U_3=4+2=6$; $U_4=6+2=8$ ....

2. Propriété.

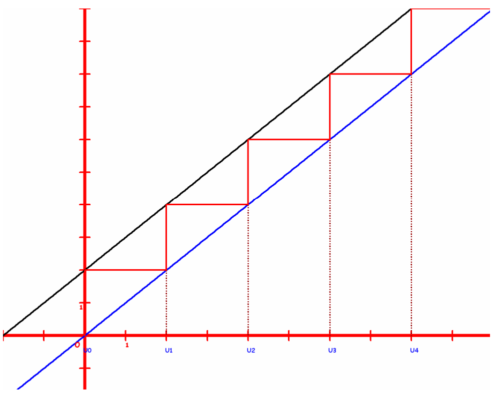
Prop : Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$, $U_n=U_m+(n-m)r$.

Ex : Considérons la suite arithmétique $(U_n)_{n\geq 0}$ où $U_{n+1}=U_n+2$ et $U_{10}=0$.

On a $U_{100}= U_{10}+(100-10)\times 2$.

Dém : Vu en Dm

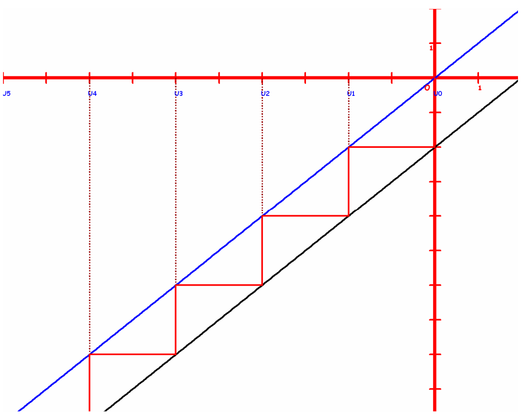
3. Représentation graphique et variation



Prop : Si la raison est positive alors la suite est **croissante.**

$(U_n)_{n\geq 0}$ où $U_{n+1}=U_n+2$ et $U_0=0$. La raison est positive, la suite est donc **croissante.**

La construction graphique de U_1, U_2 … fait apparaître un escalier qui monte avec des marches régulières.



Prop : Si la raison est négative alors la suite est **Décroissante.**

$(U_n)_{n\geq 0}$ où $U_{n+1}=U_n-2$ et $U_0=0$. La raison et négative, la suite est donc **décroissante.**

La construction graphique de U_1, U_2 … fait apparaître un escalier qui descend avec des marches régulières.

4. $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$.

a. 1+2+3+....+n

Prop : $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Dém :

$$\begin{array}{lccccc} \text{Soit } S= & 1 & +\ 2 & +\ 3 & +\ldots+ & n \\ S= & n & +\ n-1 & +\ n-2 & +\ldots+ & 1 \\ \hline 2S= & (n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +\ldots+ & (n+1) \end{array}$$

où (n+1) apparaît n fois

D'où $S=\frac{n(n+1)}{2}$. CQFD

b. Calcul de $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$.

Prop : Soit $(U_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r et $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$. Alors $S_n=\frac{n+1}{2}(2U_0+nr)=\frac{n+1}{2}(U_0+U_n)$

Ex : $U_{n+1}=U_n+2$ et $U_0=0$: $(U_n)_{n\geq o}$ est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison 2.

$S_4=U_0+U_1+U_2+U_3+U_4=\frac{5}{2}(U_0+U_4)=\frac{5}{2}(0+8)=20$

Dém :

$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$

$=U_0+U_0+r+\ldots+U_0+nr$

$=(n+1)U_0+r(1+2+3+....+n)$

$=(n+1)U_0+r\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n+1}{2}(2U_0+nr)$

$=\frac{n+1}{2}(U_0+\mathbf{U_0+nr})$

$=\frac{n+1}{2}(U_0+\mathbf{U_n})$ CQFD.

II. Suites géométriques

1. Définition.

Une suite $(U_n)_{n\geq n_0}$ pour laquelle il existe un réel q tel que pour tout $n>n_0$, $U_{n+1}=U_n\times q$ est appelée suite géométrique de premier terme U_{n0} et de raison q.

Ex : $U_{n+1}=U_n\times 2$ et $U_0=3$: $(U_n)_{n\geq o}$ est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison 2.
On a : $U_1=3\times2=6$; $U_2=6\times2=12$; $U_3=12\times3=36$; $U_4=36\times3=108$ ....

2. <u>Propriété.</u>

Prop : Soit $(U_n)_{n\geq no}$ une suite géométrique de raison q Alors pour $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$, $U_n=U_m\times q^{n-m}$.

Ex : Considérons la suite géométrique $(U_n)_{n\geq o}$ où $U_{n+1}=U_n\times 2$ et $U_{10}=-2$.

Alors : $U_{15}=U_{10}\times q^{15-10.}$

Dém : Vu en DM.

3. <u>Variation d'une suite géométrique.</u>

Prop : Soit $(U_n)_{n\geq no}$ une suite géométrique de raison q.

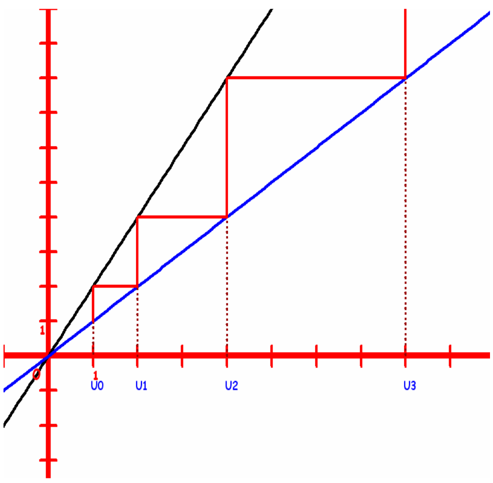
- si q>0 alors la suite (q^n) est strictement croissante et :
  - Si $U_{n0}>0$ alors $(U_n)_{n\geq no}$ est strictement croissante à partir du rang n_0.
  - Si $U_{n0}<0$ alors $(U_n)_{n\geq no}$ est strictement décroissante à partir du rang n_0..
- Si 0<q<1 alors la suite (q^n) est strictement décroissante et :
  - Si $U_{n0}<0$ alors $(U_n)_{n\geq no}$ est strictement croissante à partir du rang n_0.
  - Si $U_{n0}>0$ alors $(U_n)_{n\geq no}$ est strictement décroissante à partir du rang n_0..
- Si q<0 alors (q^n) et $(U_n)_{n\geq no}$ ne sont pas monotones.

Ex : Soit $(U_n)_{n\geq o}$ une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme -2 . $0<q<1$ et $U_{n0}<0$ donc $(U_n)_{n\geq no}$ est strictement croissante.

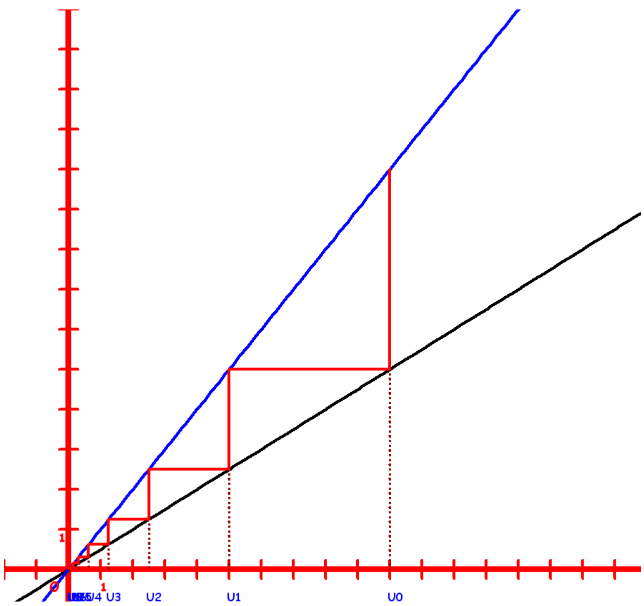
4. <u>Représentation graphique</u>

Prenons une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.

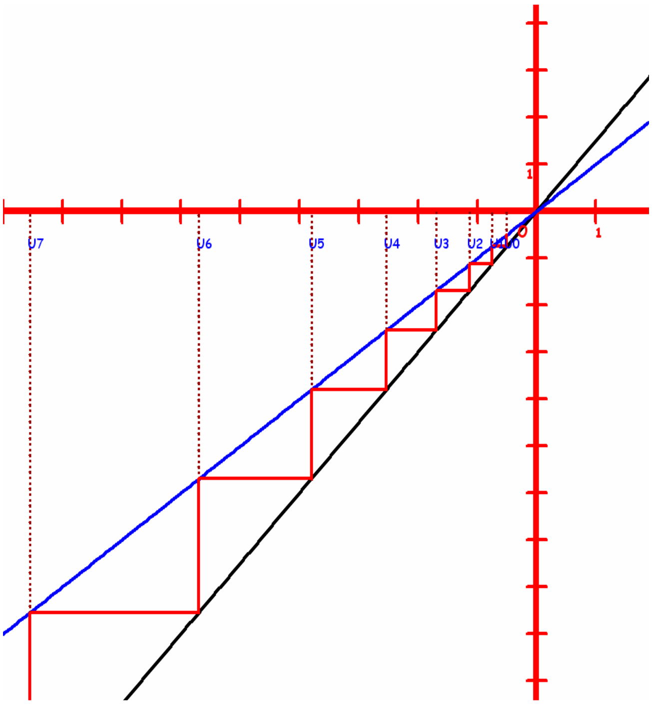
q>1 et $U_0>0$: la suite est croissante.



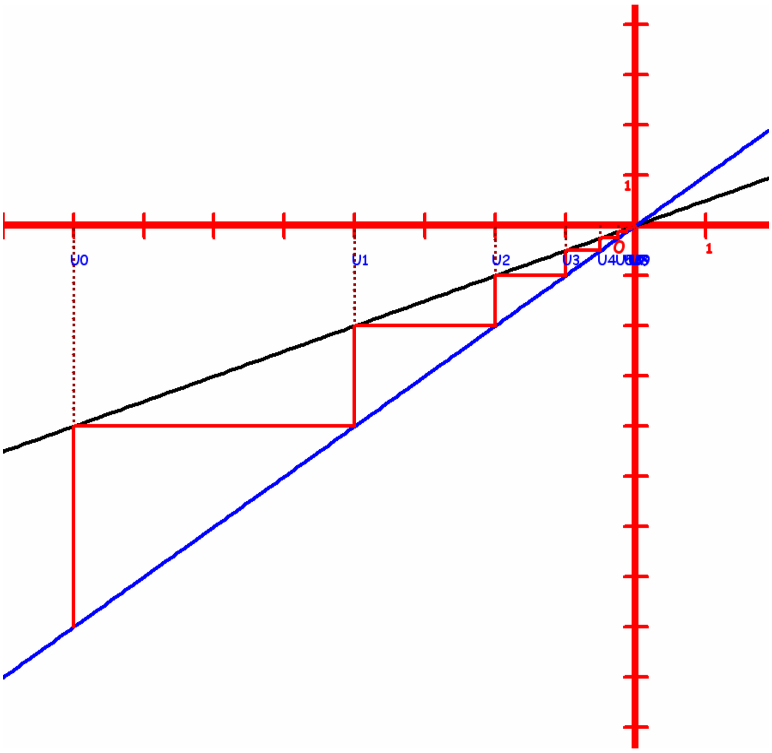
1>q>0 et $U_0>0$: La suite est décroissante.



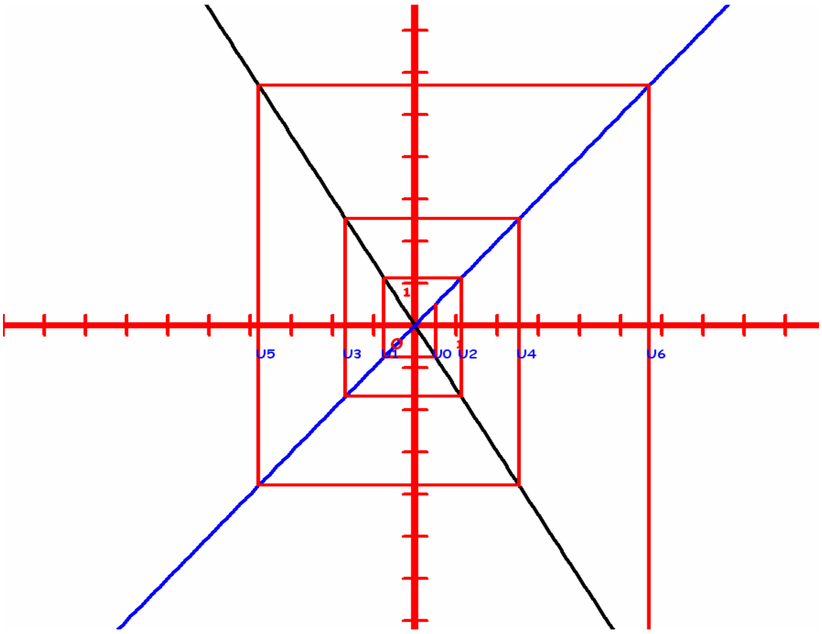
q>1 et U_0<0 : la suite est décroissante.



0>q>1 et U_0<0 : la suite est croissante.



q<-1 : Le sens de variation n'est pas monotone.



5. <u>$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$.</u>

<u>Prop :</u> Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q et $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$. Alors $S_n=U_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

<u>Dém :</u>

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & U_0+U_1+\ldots+U_n \\ \underline{\quad qS_n} & \underline{=} & \underline{U_1+U_2+\ldots+U_{n+1}} \\ (1-q)S_n & = & U_0-U_{n+1} \end{array}$$

D'où $S_n = \frac{U_0 - U_0 \times q^n}{1-q} = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ CQDF.